

PROSIDING

978-979-16353-8-7

ISBN : 978-979-16353-8-7

PROSIDING SEMINAR NASIONAL

MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Kontribusi Pendidikan Matematika dan
Matematika dalam Membangun Karakter
Guru dan Siswa"

Penyelenggara :



Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA UNY

Yogyakarta, 10 November 2012

ISBN : 978-979-16353-8-7



PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

***“ Kontribusi Pendidikan Matematika dan
Matematika dalam Membangun Karakter
Guru dan Siswa “
Yogyakarta, 10 November 2012***

Penyelenggara :
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

*Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2012*



PROSIDING SEMINAR NASIONAL
Matematika dan Pendidikan Matematika
 10 November 2012 FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

*Artikel-artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan pada
 Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
 pada tanggal 10 November 2012
 di Jurusan Pendidikan Matematika
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
 Universitas Negeri Yogyakarta*

Tim Penyunting Artikel Seminar :

1. Prof. Dr. Rusgianto
2. Dr. Sugiman
3. Dr. Jailani
4. Dr. Djamilah Bondan Widjajanti
5. Dr. Agus Maman Abadi

*Jurusan Pendidikan Matematika
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
 Universitas Negeri Yogyakarta
 2012*

KATA PENGANTAR

Puji Syukur ke Hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala Karunia dan Rahmat-Nya sehingga prosiding ini dapat diselesaikan. Prosiding ini merupakan kumpulan makalah dari peneliti, guru, mahasiswa, pemerhati dan dosen bidang Pendidikan Matematika berbagai daerah di Indonesia. Makalah yang dipresentasikan meliputi makalah hasil penelitian pada saat melaksanakan PTK/Lesson Study, pemikiran tentang pembelajaran matematika yang inovatif atau kajian teoritis seputar pembelajaran matematika sekolah.

Pada kesempatan ini panitia mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penyelenggaraan seminar ini. Khususnya, kepada seluruh peserta seminar diucapkan terima kasih atas partisipasinya dan selamat berseminar, semoga bermanfaat.

Panitia

DAFTAR ISI

MAKALAH UTAMA

No	Kode	Penulis	Judul	Hal
1	U-1	Lim, Chap Sam	MOULDING POSITIVE CHARACTERS VIA INCULCATING VALUES IN MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING	MU-1
2	U-2	S.B Waluya	PERAN MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DALAM MEMBANGUN KARAKTER BANGSA	MU-11
3	U-3	Djamilah Bondan Widjajanti	PEMBELAJARAN MATEMATIKA YANG HUMANIS: MEMBANGUN KARAKTER GURU, KARAKTER SISWA, DAN KARAKTER BANGSA	MU-19

MAKALAH BIDANG ANALISIS DAN ALJABAR

No	Kode	Penulis	Judul	Hal
1	A-1	Burhanudin Arif Nurnugroho	RUANG BARISAN DENGAN NILAI PADA RUANG BERNORMA-2 YANG DIBANGUN OLEH FUNGSI ORLICZ	MA-1
2	A-2	Dhian Arista Istikomah	KARAKTERISASI E-SEMIGRUP	MA-9
3	A-3	Dian Ariesta Yuwaningsih	BEBERAPA SIFAT TERKAIT SUBMODUL SEMIPRIMA	MA-17
4	A-4	Moch. Aruman Imron	KONSTRUKSI KLAS BARISAN P-SUPREMUM BOUNDED VARIATION SEQUENCES	MA-25
5	A-5	Dwi Lestari, Muhamad Zaki Riyanto	SUATU ALGORITMA KRIPTOGRAFI STREAM CIPHER BERDASARKAN FUNGSI CHAOS	MA-33
6	A-6	Elvina Herawaty	BEBERAPA RELASI INKLUSI PADA RUANG BARISAN BANACH LATTICE	MA-41
7	A-7	Hendra Listya Kurniawan, Musthofa	APLIKASI SISTEM LINEAR MAX-PLUS INVARIANT PADA SISTEM PRODUKSI TEMPE SUPER DANGSUL DI YOGYAKARTA	MA-53
8	A-8	M. Andy Rudhito	SISTEM LINEAR MAX-PLUS KABUR WAKTU INVARIANT AUTONOMOUS	MA-65
9	A-9	Moh. Affaf	LUAS DI R^2 DENGAN MEMANFAATKAN GARIS SINGGUNG KURVA	MA-71
10	A-10	Mustofa Arifin, Musthofa	OPTIMISASI JADWAL PEMESANAN BAKPIA PATHOK "25" DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA DENGAN SISTEM LINEAR MAX-PLUS WAKTU INVARIANT	MA-81

11	A-11	Riningsih, Indah Emilia Wijayanti	SKEMA PEMBAGIAN RAHASIA MENGUNAKAN KODE LINEAR	MA-91
12	A-12	Siswanto	NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN Matriks TERREDUKSI REGULER DALAM ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL	MA-99
13	A-13	Caturiyati, Ch. Rini Indrati, Lina Aryati	SECOND ORDER CONE (SOC) DAN SIFAT-SIFAT KENDALA SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA 1	MA-114
14	A-14	Caturiyati, Ch. Rini Indrati, Lina Aryati	KEKONVEKSKAN DAERAH FISIBEL SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA 1	MA-119

MAKALAH BIDANG PENDIDIKAN MATEMATIKA

No	Kode	Penulis		Halaman
1	P-1	Akhmad Nayazik	PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN MENGINTEGRASIKAN HOM (HISTORY OF MATHEMATICS) UNTUK MENINGKATKAN MOTIVASI BELAJAR	MP-1
2	P-2	Amir Fatah	MODIFIKASI PERSEPSI : HARAPAN BARU MENINGKATKAN MINAT BELAJAR MATEMATIKA TERAPAN (MEKANIKA FLUIDA)	MP-9
3	P-3	Amir Mahmud	EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE STAD DAN JIGSAW PADA POKOK BAHASAN BENTUK ALJABAR DITINJAU DARI PERHATIAN ORANG TUA SISWA KELAS VII SMP NEGERI DI KABUPATEN CILACAP TAHUN PELAJARAN 2010/ 2011	MP-15
4	P-4	Andri Anugrahana	INTEGRASI KECAKAPAN HIDUP SISWA MELALUI PENGALAMAN BELAJAR MATEMATIKA KONTEKS DUNIA NYATA SISWA DI SEKOLAH DASAR	MP-27
5	P-5	Andri Suryana	KEMAMPUAN BERPIKIR MATEMATIS TINGKAT LANJUT (ADVANCED MATHEMATICAL THINKING) DALAM MATA KULIAH STATISTIKA MATEMATIKA 1	MP-37
6	P-6	Angelia Padmarini Dharmamurti, Ch. Enny Murwaningtyas	EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN REMEDIAL DENGAN MENGGUNAKAN ALAT PERAGA "KOTAK GESER" PADA MATERI PERKALIAN DAN FAKTORISASI BENTUK ALJABAR DI KELAS VIII SMPN 2 JETIS BANTUL	MP-49
7	P-7	Angelina Dwi Marsetyorini, Ch. Enny Murwaningtyas	DIAGNOSIS KESULITAN BELAJAR SISWA DAN PEMBELAJARAN REMEDIAL DALAM MATERI OPERASI PADA PECAHAN BENTUK ALJABAR DI KELAS VIII SMPN 2 JETIS BANTUL	MP-59

8	P-8	Angger Rengga Hutama, M. Andy Rudhito	EFEKTIFITAS PEMBELAJARAN DENGAN PROGRAM CABRI 3D UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN SISWA TENTANG KONSEP SIKU-SIKU DALAM SUB-POKOK BAHASAN PENERAPAN TEOREMA PHYTAGORAS PADA BANGUN RUANG DI KELAS VIII SMP PANGUDI LUHUR GANTIWARNO	MP-71
9	P-9	Anggria Septiani	PENERAPAN STRATEGI INQUIRY BASED LEARNING DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA SISWA KELAS VII SMP NEGERI 45 PALEMBANG	MP-81
10	P-10	Ani Minarni	PENGARUH PEMBELAJARAN BERBASIS MASALAH TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH SISWA SMP	MP-91
11	P-11	Aris Nurkholis	PENILAIAN PORTOFOLIO DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS KONTEKSTUAL PADA SISWA KELAS 1 SD JUARA YOGYAKARTA TAHUN AJARAN 2011/2012	MP-103
12	P-12	Asep Ikin Sugandi	PERANAN MATEMATIKA DALAM MENUMBUHKAN KARAKTER SISWA	MP-111
13	P-13	Aulia Musla Mustika	PENERAPAN PMRI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH DASAR UNTUK MENUMBUHKEMBANGKAN PENDIDIKAN KARAKTER	MP-121
14	P-14	Awit Widya Lestari	PENGAPLIKASIAN PROGRAM WINGEOM PADA POKOK BAHASAN KUBUS DAN BALOK	MP-131
15	P-15	Bernadeta Ayu Setyanta, Ch. Enny Murwaningtyas	PENGARUH PEMBERIAN KUIS TERHADAP MOTIVASI DAN HASIL BELAJAR SISWA SMP KANISIUS KALASAN TAHUN PELAJARAN 2012/2013 PADA MATERI FAKTORISASI SUKU ALJABAR	MP-141
16	P-16	Burhan Iskandar Alam	PENINGKATAN KEMAMPUAN PEMAHAMAN DAN KOMUNIKASI MATEMATIKA SISWA SD MELALUI PENDEKATAN REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION (RME)	MP-149
17	P-17	Desti Haryani	PROFIL PROSES BERPIKIR KRITIS SISWA SMA DENGAN GAYA KOGNITIF FIELD INDEPENDEN DAN BERJENIS KALAMIN PEREMPUAN DALAM MEMECAHKAN MASALAH MATEMATIKA	MP-165

18	P-18	Desti Haryani	MEMBENTUK SISWA BERPIKIR KRITIS MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-175
19	P-19	Devy Yuliasri Kurnia Putri, Intan Ayu Maharani	PENANAMAN SIKAP ANTI KORUPSI DAPAT MELALUI PELAJARAN MATEMATIKA	MP-183
20	P-20	Didi Suhaedi	PENINGKATAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA SMP MELALUI PENDEKATAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK	MP-191
21	P-21	Edy Bambang Irawan	THE CHALLENGE OF MATHEMATICS TEACHERS IN DEALING WITH VARIOUS CURRICULUM CHANGES (A THEORETICAL REVIEW)	MP-201
22	P-22	Endang Setyo Winarni	MEMBANGUN KARAKTER SISWA SEKOLAH DASAR (SD) MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN MENGGUNAKAN MEDIA BENDA KONKRET	MP-209
23	P-23	Sumiyati	MENUMBUHKAN KARAKTER BEKERJA KERAS DAN PANTANG MENYERAH PADA SISWA KELAS XII IPS SMAN 1 TEMPEL MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-217
24	P-24	Susiana Suryandari	OPTIMALISASI MEMBENTUK KARAKTER MENGGUNAKAN STIMULUS OTAK KANAN DAN OTAK KIRI PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA DALAM PENCAPAIAN TARGET PRESTASI PUNCAK	MP-227
25	P-25	Tumisah	PENINGKATAN PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA DENGAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE THINK-PAIR-SHARE (TPS) DI SMK NEGERI 1 PANDAK KELAS X TPHP 1	MP-235
26	P-26	Ary Widayanto	PENGARUH MOTIVASI BERPRESTASI, INTELIJENSI QUOTIENT, DAN FASILITAS BELAJAR SISWA TERHADAP PRESTASI OLIMPIADE SAINS DI SMA NEGERI 1 BANTUL TAHUN AJARAN 2011-2012	MP-243
27	P-27	Muniri	MODEL PENALARAN INTUITIF SISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA	MP-251
28	P-28	Suryo Widodo	PROFIL KREATIVITAS GURU SMP DALAM MEMBUAT MASALAH MATEMATIKA KONTEKSTUAL BERDASARKAN KUALIFIKASI AKADEMIK	MP-263

29	P-29	Eka Setyaningsih	KEPEDULIAN GURU DALAM MENANAMKAN KARAKTER PESERTA DIDIK PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-271
30	P-30	Elisabeth Evi Alviah, M. Andy Rudhito	EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN DENGAN PROGRAM GEOGEBRA DIBANDING PEMBELAJARAN KONVENSIONAL PADA TOPIK GRAFIK FUNGSI KUADRAT KELAS X SMA PANGUDI LUHUR YOGYAKARTA	MP-279
31	P-31	Elly Susanti	MENINGKATKAN PENALARAN SISWA MELALUI KONEKSI MATEMATIKA	MP-289
32	P-32	Epon Nur'Aeni, Dindin Abdul Muiz Lidinillah, Ayi Sakinatussa'Adah	MODEL DISAIN DIDAKTIS PEMBAGIAN PECAHAN BERBASIS PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK UNTUK SISWA KELAS V SEKOLAH DASAR	MP-297
33	P-33	Essy Purwaningtyas	EFEKTIVITAS MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE NUMBERED HEADS TOGETHER (NHT) DITINJAU DARI KREATIVITAS DAN KARAKTER SISWA DI SMP NEGERI 15 YOGYAKARTA	MP-309
34	P-34	Ety Septiati	KEEFEKTIFAN PENDEKATAN KONSTRUKTIVISME TERHADAP KEMAMPUAN KONEKSI MATEMATIS MAHASISWA PADA MATA KULIAH ANALISIS REAL I	MP-319
35	P-35	Fransiscus Dimas Permadi, M. Andy Rudhito	EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN DENGAN PROGRAM GEOGEBRA DIBANDING PEMBELAJARAN KONVENSIONAL PADA MATERI TEOREMA PYTHAGORAS KELAS VIII SMP PANGUDI LUHUR GANTIWARNO KLATEN	MP-325
36	P-36	Gadis Arniyati Athar	PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN PENDEKATAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK (PMR) BERBASIS BUDAYA CERITA RAKYAT MELAYU RIAU PADA KELAS 3 SEKOLAH DASAR.	MP-335
37	P-37	Garini Widosari	PENGUNAAN SOFTWARE MATLAB UNTUK MENINGKATKAN MINAT BELAJAR MATEMATIKA DI POLITEKNIK NEGERI SAMARINDA	MP-347
38	P-38	Georgina Maria Tinungki	SENI MENGAJAR SEORANG GURU MATEMATIKA IDAMAN SISWA	MP-351

39	P-39	Pivi Alpia Podomi, Ginangjar Abdurrahman, Yandri Soeyono	KEYAKINAN GURU TERHADAP MATEMATIKA DAN PROFESI	MP-361
40	P-40	Heru Kurniawan	UPAYA PENINGKATAN EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI METODE KOOPERATIF TIPE TEAM ASSISTED INDIVIDUALIZATION (TAI) PADA SISWA KELAS V SD NEGERI SIDOMULYO TAHUN PELAJARAN 2011/2012	MP-369
41	P-41	Hery Suharna	BERPIKIR REFLEKTIF (REFLECTIVE THINKING) SISWA SD BERKEMAMPUAN MATEMATIKA TINGGI DALAM PEMAHAMAN MASALAH PECAHAN	MP-377
42	P-42	Zetriuslita	PENERAPAN PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE NHT UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS X-4 SMAN 1 SIAK HULU	MP-387
43	P-43	Huri Suhendri	PENGARUH KECERDASAN MATEMATIS-LOGIS, RASA PERCAYA DIRI, DAN KEMANDIRIAN BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA	MP-397
44	P-44	Ibrahim	KEBIASAAN BELAJAR MATEMATIKA SISWA DAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS MASALAH	MP-405
45	P-45	Yusuf Suryana, Oyon Haki Pranata, Ika Fitri Apria	DESAIN DIDAKTIS PENGENALAN KONSEP PECAHAN SEDERHANA PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI KELAS III SEKOLAH DASAR	MP-413
46	P-46	In Hi Abdullah	PENINGKATAN KEMAMPUAN REPRESENTASI MATEMATIS SISWA SMP MELALUI PEMBELAJARAN KONTEKSTUAL YANG TERINTEGRASI DENGAN SOFT SKILL.	MP-427
47	P-47	Isrok'Atun	CREATIVE PROBLEM SOLVING (CPS) MATEMATIS	MP-437
48	P-48	Karman La Nani	KONSTRUKSI SELF-REGULATION SKILL DAN HELP-SEEKING BEHAVIOR DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-449
49	P-49	Ketut Sutame, Harpint	MEREDUKSI MATHEMATICS ANXIETY DAN MENYUBURKAN PROBLEM SOLVING ABILITY DENGAN PENDEKATAN PROBLEM POSING	MP-459

50	P-50	Kholida Agustin, Yulia Linguistika	IDENTIFIKASI KESALAHAN SISWA KELAS X PADA EVALUASI MATERI SIFAT-SIFAT BILANGAN BERPANGKAT DENGAN PANGKAT BILANGAN BULAT DI SMA MUHAMMADIYAH 2 YOGYAKARTA	MP-471
51	P-51	Kikin Windhani, Fajar Hardoyono	ANALYSIS OF STUDENTS' ABILITY IN MATH CONCEPTS AS A TOOL FOR STUDYING ECONOMIC THEORY	MP-487
52	P-52	Kuswati, Nila Kurniasih, Puji Nugrahen	EKSPERIMENTASI METODE DISCOVERY DAN METODE THINK-PAIR-SHARE (TPS) TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA DITINJAU DARI KEMAMPUAN ANALOGI MATEMATIS SISWA KELAS VIII SMP NEGERI 26 PURWOREJO TAHUN PELAJARAN 2011/2012	MP-499
53	P-53	La Moma	MENUMBUHKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KREATIF MATEMATIS MELALUI PEMBELAJARAN GENERATIF SISWA SMP	MP-505
54	P-54	Laela Sagita, Widi Astuti	UPAYA MENINGKATKAN KARAKTER POSITIF SISWA DAN PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA MELALUI METODE KOOPERATIF DENGAN MENGGUNAKAN MEDIA TRAVEL GAME DI SMP NEGERI 14 YOGYAKARTA	MP-515
55	P-55	Leo Agung Noviar Kidung Adi, M. Andy Rudhito	PEMANFAATAN PROGRAM CABRI 3D DALAM UPAYA MENGATASI KESULITAN BELAJAR SISWA KELAS 5 SD NEGERI BANYUURIP PURWOREJO PADA POKOK BAHASAN VOLUME KUBUS DAN BALOK	MP-527
56	P-56	Leonardo Errick Pradika, Ch. Enny Murwaningtyas	ANALISIS KESALAHAN SISWA KELAS VIII I SMP N 1 KARANGANYAR DALAM MENGERJAKAN SOAL PADA POKOK BAHASAN BANGUN RUANG SISI DATAR SERTA UPAYA REMEDIASINYA DENGAN MEDIA BANTU PROGRAM CABRI 3D	MP-537
57	P-57	Lina Wulandari, Nurhadi Waryanto	PEMANFAATAN CABRI 3D DALAM MEDIA INTERAKTIF BERBASIS METODE INKUIRI PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR UNTUK MENINGKATKAN CARA BERPIKIR KRITIS SISWA KELAS VIII SMP	MP-547
58	P-58	Marhayati	PEMAHAMAN SOAL CERITA MELALUI PARAPRASE	MP-555
59	P-59	Maria Ulpah	MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN STATISTIS SISWA MADRASAH ALIYAH MELALUI PENDEKATAN KONTEKSTUAL DI KABUPATEN BANYUMAS	MP-563

60	P-60	Maya Kusumaningrum, Abdul Aziz Saefudin	MENGOPTIMALKAN KEMAMPUAN BERPIKIR MATEMATIKA MELALUI PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA	MP-571
61	P-61	Mefa Indriati ,Tuti Syafrianti	PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TEKNIK THINK PAIR SQUARE (TPS) UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS VIII SMP ISLAM YLPI PEKANBARU	MP-581
62	P-62	Muhamad Yasin	ANALISIS GAYA KOMUNIKASI GURU MATEMATIKA BERDASARKAN TEORI KOMUNIKASI LOGIKA DESAIN PESAN	MP-591
63	P-63	Muhammad Rijal Wahid Muharram	QUANTUM MATHEMATIC, MEMAHAMI NILAI-NILAI MATEMATIKA UNTUK MEMBANGUN KARAKTER BANGSA	MP-599
64	P-64	Niken Wahyu Utami, Jailani	PERMASALAHAN PENYUSUNAN PERANGKAT PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-611
65	P-65	Niluh Sulistyani, S.Pd	IMPLEMENTASI PEMBELAJARAN BERBASIS MASALAH DIPADUKAN DENGAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TAI (TEAM ASSISTED INDIVIDUALIZATION) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS MATEMATIS PADA SISWA SMP N 2 SENTOLO KELAS IXA	MP-621
66	P-66	Maesia Ledua, Ninda Argafani, M. F. Atsnan	PARENTS BEHAVIOUR IN STRUGGLING TO MOTIVATE MATHEMATICS LEARNERS	MP-629
67	P-67	Nora Surmilasari	PENGEMBANGAN LKS MATEMATIKA BERBASIS KONSTRUKTIVISME UNTUK PEMBELAJARAN MATERI PERKALIAN DUA MATRIKS DI KELAS XII SMA	MP-635
68	P-68	Novi Komariyatiningasih, Nila Kesumawati	KETERKAITAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS DENGAN PENDEKATAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK INDONESIA (PMRI)	MP-643
69	P-69	Nurina Kurniasari Rahmawati, Teguh Wibowo, Nila Kurniasi	PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN E-LEARNING PADA MATERI KUBUS DAN BALOK TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS VIII SMP N SE-KECAMATAN BANYUURIP DITINJAU DARI MOTIVASI BELAJAR SISWA	MP-651

70	P-70	Pasttita Ayu Laksmiwati, Ali Mahmudi	PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS METODE INQUIRY BERBANTUAN CABRI 3D PADA MATERI RUANG DIMENSI TIGA	MP-659
71	P-71	Paulina Hani Rusmawati, M. Andy Rudhito	DESAIN LEMBAR KERJA SISWA DENGAN PEMANFAATAN PROGRAM GEOGEBRA MELALUI DEMONSTRASI UNTUK MENDUKUNG PENYAMPAIAN MATERI KESEBANGUNAN DI KELAS IX SMP NEGERI 2 JETIS-BANTUL	MP-671
72	P-72	Purna Bayu Nugroho, Suparni, Mulin Nu'M	EFEKTIVITAS MODEL PEMBELAJARAN MISSOURI MATHEMATICS PROJECT (MMP) DENGAN METODE TALKING STICK DAN PENEMUAN TERBIMBING TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS X MAN MAGUWO HARJO SLEMAN (PENELITIAN EKSPERIMEN POKOK BAHASAN TRIGONOMETRI)	MP-681
73	P-73	Qodri Ali Hasan	REKONSTRUKSI PEMAHAMAN KONSEP PEMBAGIAN PADA SISWA BERKEMAMPUAN TINGGI	MP-689
74	P-74	Qodri Ali Hasan	PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN OPERASI PEMBAGIAN DENGAN MENEKANKAN ASPEK PEMAHAMAN.	MP-699
75	P-75	Qurotuh Ainia, Nila Kurniasih, Mujiyem Sapti	EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN AUDITORY INTELLECTUALLY REPETITION (AIR) TERHADAP PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA DITINJAU DARI KARAKTER BELAJAR SISWA KELAS VII SMP NEGERI SE-KECAMATAN KALIGESING TAHUN 2011/2012	MP-709
76	P-76	Ratu Ilma Indra Putri	PENDISAINAN HYPOTETICAL LEARNING TRAJECTORY (HLT) CERITA MALIN KUNDANG PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-717
77	P-77	Riawan Yudi Purwoko, Wawan	PEMBELAJARAN MATEMATIKA MENGUNAKAN SOFTWARE WINPLOT PADA MATERI TURUNAN TERHADAP PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS XI-IPS SMA MUHAMMADIYAH SE-KABUPATEN PURWOREJO	MP-725
78	P-78	Rima Oktaviani, Mujiyem Sapti, Puji Nugraheni	EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TGT TERHADAP PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA DITINJAU DARI MOTIVASI BELAJAR SISWA KELAS VIII SMP NEGERI 2 BULUSPESANTREN TAHUN PELAJARAN 2011/2012	MP-735

79	P-79	Risnanosanti	HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY UNTUK MENUMBUHKEMBANGKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KREATIF MATEMATIS SISWA SMA DI KOTA BENGKULU	MP-743
80	P-80	Rudi Santoso Yohanes	STRATEGI SISWA SMP DALAM MENYELESAIKAN MASALAH GEOMETRI DITINJAU DARI DOMINASI OTAK KIRI DAN OTAK KANAN	MP-751
81	P-81	Rufina Ni Luh Wiwik Handayani, Ch. Enny Murwaningtyas	PENGARUH PENGGUNAAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE STAD TERHADAP MOTIVASI DAN HASIL BELAJAR SISWA PADA POKOK BAHASAN PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN BILANGAN BULAT DI KELAS VII A SMP KANISIUS KALASAN YOGYAKARTA TAHUN PELAJARAN 2012-2013	MP-761
82	P-82	Selvi Rajuaty Tandiseru	KEPEDULIAN GURU MATEMATIKA DALAM MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERFIKIR KREATIF SISWA	MP-771
83	P-83	Setyawati, Ibrahim	EFEKTIVITAS PENGGUNAAN MODEL PEMBELAJARAN RECIPROCAL TEACHING DILENGKAPI DRILL SOAL TERHADAP PENINGKATAN PEMAHAMAN KONSEP DAN MOTIVASI BELAJAR MATEMATIKA SISWA DITINJAU DARI KEMAMPUAN MATEMATIKA UMUM SISWA	MP-779
84	P-84	Sri Adi Widodo	PROSES BERPIKIR MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA BERDASARKAN DIMENSI TEACHER	MP-789
85	P-85	Sri Adi Widodo	PROSES BERPIKIR MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA BERDASARKAN DIMENSI HEALER	MP-795
86	P-86	Sri Hastuti Noer	SELF-EFFICACY MAHASISWA TERHADAP MATEMATIKA	MP-801
87	P-87	Subanindro	PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN TRIGONOMETRI BERORIENTASIKAN KEMAMPUAN PENALARAN DAN KOMUNIKASI MATEMATIK SISWA SMA	MP-809
88	P-88	Suhas Caryono, Suhartono	ANALISIS DESKRIPTIF FAKTOR PENYEBAB KESULITAN BELAJAR MATA PELAJARAN MATEMATIKA DI SMA NEGERI 8 PURWOREJO TAHUN PELAJARAN 2012/2013	MP-819

89	P-89	Syahrir	PENGARUH PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE JIGSAW DAN TEAMS GAME TURNAMEN (TGT) TERHADAP MOTIVASI BELAJAR DAN KETERAMPILAN MATEMATIKA SISWA SMP (STUDI EKSPERIMEN DI SMP DARUL HIKMAH MATARAM)	MP-827
90	P-90	Syukrul Hamdi	MEMAHAMI KARAKTERISTIK PSIKOLOGIS SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERDASARKAN KECERDASAN INTUITIF DAN REFLEKTIF	MP-839
91	P-91	Tantan Sutandi Nugraha	PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS MASALAH YANG BERLANDASKAN NILAI-NILAI KARAKTER DENGAN PENGGUNAAN MEDIA TIK PADA KELAS DWI-BAHASA DALAM KOMPETENSI DASAR MENENTUKAN SLOPE DAN PERSAMAAN GARIS LURUS	MP-849
92	P-92	Tatan. Zm	ANALISIS PROKRASINASI TUGAS AKHIR/SKRIPSI	MP-863
93	P-93	Titin Mulyaningsih	PERMAINAN MAMUN TEBAL UNTUK MENINGKATKAN KETERAMPILAN HITUNG BILANGAN BULAT SISWA KELAS IV SDN KOTAGEDE III YOGYAKARTA	MP-873
94	P-94	Donny Seftyanto, Mega Apriani, Tony Haryanto	PERAN ALGORITMA CAESAR CIPHER DALAM MEMBANGUN KARAKTER AKAN KESADARAN KEAMANAN INFORMASI	MP-883
95	P-95	Tri Nova Hasti Yunianta, Ani Rusilowati, Rochmad	KEMAMPUAN BERPIKIR KREATIF SISWA PADA IMPLEMENTASI PROJECT-BASED LEARNING DENGAN PEER AND SELF-ASSESSMENT UNTUK MATERI SEGIEMPAT KELAS VII SMPN RSBI 1 JUWANA DI KABUPATEN PATI	MP-891
96	P-96	Urip Tisngati	MEMBANGUN KARAKTER DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI KETERAMPILAN KOMUNIKASI	MP-903
97	P-97	Veronica Wiwik Dwi Astuty, M. Andy Rudhito	PENGGUNAAN PROGRAM GEOGEBRA DALAM UPAYA MENGATASI KESULITAN BELAJAR SISWA KELAS VIII E SMP N I NANGGULAN KULON PROGO POKOK BAHASAN GRAFIK GARIS LURUS PADA PEMBELAJARAN REMEDIAL	MP-913
98	P-98	Watijo Hastoro	MENENTUKAN LUAS DAERAH BANGUN DATAR DENGAN PAPAN BERPETAK UNTUK SISWA SMP KELAS VII	MP-923

99	P-99	Widi Astuti	EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE STAD PADA MATERI PECAHAN TERHADAP PRESTASI BELAJAR MATEMATIKA KELAS IV SD SE-GUGUS SULTAN AGUNG DITINJAU DARI MOTIVASI BELAJAR SISWA	MP-937
100	P-100	Wiryanto	REPRESENTASI SISWA SEKOLAH DASAR DALAM PEMAHAMAN KONSEP PECAHAN	MP-943
101	P-101	Wulan Fitriyani	PEMANFAATAN SOFTWARE GEOGEBRA MELALUI STRATEGI IDEAL PADA MATERI SUDUT PUSAT DAN SUDUT KELILING LINGKARAN UNTUK MENINGKATKAN KEAKTIFAN DAN HASIL BELAJAR SISWA KELAS VIII F SMP NEGERI 3 PATI TAHUN PELAJARAN 2011/2012	MP-959
102	P-102	Yohanes Aditya Kurniawan, Ch. Enny Murwanintyas	PENGARUH PROGRAM BRIDGING COURSE TERHADAP HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII CERDAS SMP KANISIUS PAKEM	MP-967
103	P-103	Yulia Tri Widyaningrum, Ch. Enny Murwanintyas	PENGARUH MEDIA PEMBELAJARAN GEOGEBRA TERHADAP MOTIVASI DAN HASIL BELAJAR SISWA PADA MATERI GRAFIK FUNGSI KUADRAT DI KELAS X SMA NEGERI 2 YOGYAKARTA TAHUN PELAJARAN 2012/2013	MP-975
104	P-104	Yulis Jamiah	PEMBIASAAN SIKAP POSITIF DALAM MEMBANGUN KARAKTER MAHASISWA MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA	MP-981
105	P-105	Endang Listyani	IMPLEMENTASI PENDIDIKAN KARAKTER DALAM PERKULIAHAN	MP-989
106	P-106	Elly Arliani	MENGEMBANGKAN SIKAP SALING MENGHARGARI MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA : UPAYA MEMPERBAIKI KARAKTER BANGSA	MP-995
107	P-107	Rohana	PERAN PENDIDIKAN MATEMATIKA SEBAGAI WAHANA PEMBANGUN KARAKTER BANGSA	MP-999
108	P-108	Friska Anggun Diana Sari, Kuswari Hernawati	PEMANFAATAN PROGRAM CABRI 3D DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA MATERI BANGUN RUANG SISI LENGKUNG KELAS IX SMP DALAM UPAYA MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA	MP-1009

MAKALAH BIDANG STATISTIKA

No	Kode	Penulis	Judul	Hal
1	S-1	Bertho Tantular	PENDEKATAN MODEL MULTILEVEL UNTUK DATA REPEATED MEASURE	MS-1
2	S-2	Dessy Gusnita	ANALISA FAKTOR GAS BUANG KENDARAAN BERBAHAN BAKAR SOLAR MENGGUNAKAN RANCANGAN ACAK LENGKAP (SUATU APLIKASI MATEMATIKA DAN STATISTIKA UNTUK PENELITIAN LINGKUNGAN)	MS-11
3	S-3	Frangky Masipupu, Adi Setiawan, Bambang Susanto	PENGKONSTRUKSIAN GRAFIK PENGENDALI BERDASAR BOXPLOT BIVARIAT	MS-19
4	S-4	Rangga Pradeka, Adi Setiawan, Lilik Linawati	STUDI SIMULASI UJI KOEFISIEN KORELASI SPEARMAN DAN KENDALL DARI SAMPEL YANG DIBANGKITKAN BERDASARKAN ESTIMASI DENSITAS KERNEL MULTIVARIAT	MS-33
5	S-5	Sugiyanto, Etik Zukhronah	PEMILIHAN UJI NONPARAMETRIK TERBAIK UNTUK DUA SAMPEL BEBAS MELALUI METODE SIMULASI	MS-47
6	S-6	Vania Mutiarani, Adi Setiawan, Hanna Arini Parhusip	PENERAPAN MODEL REGRESI LINIER BAYESIAN UNTUK MENGESTIMASI PARAMETER DAN INTERVAL KREDIBEL	MS-53
7	S-7	Lilik Fauziah, Retno Subekti	PEMBENTUKAN PORTOFOLIO OPTIMAL MENGGUNAKAN METODE MINIMAX	MS-65
8	S-8	Esti Nur Kurniawati, Retno Subekti	PEMODELAN SISTEM ANTRIAN MULTISERVER DENGAN MULTITASK SERVER MENGGUNAKAN VACATION QUEUEING	MS-77

MAKALAH BIDANG MATEMATIKA TERAPAN DAN KOMPUTER

No	Kode	Penulis	Judul	Hal
1	T-1	Allen Marga Retta	PENGEMBANGAN MATERI INTEGRAL BERBASIS MODUL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI PROGRAM STUDI PENDIDIKAN BIOLOGI	MT-1
2	T-2	Amalia Dikaningtyas, Kus Prihantoso K	ANALISIS MODEL MATEMATIKA TENTANG PENGARUH KEMOTERAPI TERHADAP DINAMIK PERTUMBUHAN SEL TUMOR DAN SEL NORMAL	MT-11

3	T-3	Arga Dhahana Pramudianto,Rino	PENGUNAAN POLINOMIAL UNTUK STREAM KEY GENERATOR PADA ALGORITMA STREAM CIPHERS BERBASIS FEEDBACK SHIFT REGISTER	MT-17
4	T-4	Eko Tulus Budi Cahyanto, Agus Winarno, Mulyadi	POLYNOMIAL FUNCTIONS DAN IMPLEMENTASINYA DALAM ALGORITMA ADVANCED ENCRYPTION STANDARD PADA DATABASE ACCOUNTING	MT-31
5	T-5	Farida Cahya Kusuma, Sudradjat	RANCANGAN MODEL SIMULASI ANTRIAN UNTUK MENGURANGI KEMACETAN KENDARAAN DI PELABUHAN MERAK BANTEN	MT-45
6	T-6	Farikhin	MODEL REDUKSI UNTUK SISTEM MIMO	MT-53
7	T-7	Garini Widosari	PERAMALAN CURAH HUJAN DENGAN WAVELET	MT-61
8	T-8	Hariyanto, Utami Dyah Purwati	MENGKONSTRUKSI MODEL KONTAK DIANTARA SPECIES PADA TRANSMISI PENYEBARAN PENYAKIT DENGAN MENGUNAKAN MODEL JARINGAN	MT-69
9	T-9	Indun Titisariwati	MENGHITUNG VOLUME CADANGAN DENGAN CARA NUMERIK	MT-81
10	T-10	Jonner Nainggolan	KONTROL OPTIMAL VAKSINASI MODEL EPIDEMIOLOGI TIPE SIR	MT-89
11	T-11	Rivelson Purba	PENERAPAN LOGIKA FUZZY PADA PROGRAM LINEAR	MT-101
12	T-12	Sekar Sukma Asmara	PENGUNAAN METODE BAYESIAN SUBYEKTIF DALAM PENGKONSTRUKSIAN GRAFIK PENGENDALI-P	MT-115
13	T-13	Sri Andayani	MODEL PENILAIAN ASPEK AFEKTIF 'AKHLAK MULIA' BERBASIS DATA LINGUISTIK	MT-125
14	T-14	Sri Kuntari	DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF GEAR	MT-135
15	T-15	Subchan, Mohammad Rifai	ANALISA KESTABILAN PERSAMAAN GERAK ROKET TIGA DIMENSI TIPE RKX-LAPAN	MT-139

16	T-16	Tahiyatul Asfihani, Subchan	PANDUAN DAN KENDALI KAPAL TANPA AWAK DENGAN MENGGUNAKAN METODE MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC) DAN AKAR KUADRAT-UNSCENTED KALMAN FILTER (AK-UKF)	MT-149
17	T-17	Wartono	MODIFIKASI METODE KING DENGAN MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK	MT-163
18	T-18	Alvida Mustikarukmi	DETEKSI OUTLIER BERBASIS KLASSTER DENGAN ALGORITMA SHARED NEAREST NEIGHBOR	MT-173
19	T-19	Nur Insani	PEMANFAATAN NETWORKX UNTUK MENGEKSPLORASI DAN MENGANALISA JARINGAN BESERTA SIFAT/KARAKTERISTIKNYA	MT-185
20	T-20	Kuswari Hernawati	Pengenalan Teknologi Sejak Dini Dengan Belajar Sambil Bermain Melalui Smartphone	MT-193
21	T-21	Dimas Aryo Prakoso, Kuswari Hernawati	PERBANDINGAN RASIO KOMPRESI PADA KOMPRESI CITRA DIGITAL BITMAP MENGGUNAKAN KOMBINASI METODE DISCRETE COSINE TRANSFORM DAN ARITHMETIC CODING DENGAN BERBAGAI DIMENSI CITRA SUMBER	MT-205
22	T-22	Nikenasih Binatari	PENENTUAN HARGA DAN BATAS EKSEKUSI OPSI TIPE AMERIKA MODEL BLACK-SCHOLES MENGGUNAKAN FINITE ELEMENT METHODS (FEM)	MT-217

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS TERREDUKSI REGULER DALAM ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Siswanto¹, Ari Suparwanto², M. Andy Rudhito³

¹Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FMIPA UNS Surakarta,

²Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta

³FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta

e-mail : ¹ sis.mipauns@yahoo.co.id, ²ari_suparwanto@yahoo.com, ³arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Misalkan $\mathfrak{R}$ himpunan bilangan real. Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi maksimum " $\oplus$ " dan plus " $\otimes$ ". Dibentuk himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup dalam $\mathfrak{R}_{\max}$. Himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi " $\bar{\oplus}$ " dan " $\bar{\otimes}$ " disebut aljabar Max-Plus interval. Selanjutnya, dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ ditulis $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$. Misalkan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dan $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, matriks interval A dikatakan tak tereduksi jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ tak tereduksi. Jika tidak demikian matriks interval A dikatakan tereduksi. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks interval tereduksi reguler.

Kata kunci : Aljabar Max-Plus interval, nilai eigen, vektor eigen, matriks tereduksi reguler.

PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{\varepsilon\}$, $\varepsilon = -\infty$ dilengkapi dengan operasi maksimum " $\oplus$ " dan plus " $\otimes$ " merupakan semiring idempoten yang komutatif. Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas. (Baccelli, *et.al* [1]). Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar Max-Plus telah digeneralisasi menjadi aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Aljabar Max-Plus interval yaitu himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi " $\bar{\oplus}$ " dan " $\bar{\otimes}$ ", sedangkan aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu himpunan $F(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi " $\boxplus$ " dan " $\boxotimes$ " (Rudhito [6]).

Dari himpunan $\mathfrak{R}_{\max}$ dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen $\mathfrak{R}_{\max}$, dinotasikan dengan $\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$. Himpunan ini

dilengkapi dengan operasi maksimum " $\oplus$ " dan plus " $\otimes$ " merupakan semiring yang idempoten (Akian, *et. al*, [1], Butkovic [3], Konigsberg [5]). Demikian juga, $\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ yaitu himpunan matriks berukuran $m \times n$ dalam aljabar Max-Plus. Khusus untuk $n = 1$, diperoleh himpunan vektor dalam aljabar Max-Plus ditulis $\mathfrak{R}_{\max}^m$ (Farlow [4]).

Misalkan $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$, graf komunikasi dari A ditulis $G(A)$. Jika $G(A)$ terhubung kuat maka matriks A dikatakan tak tereduksi. Sebaliknya, jika $G(A)$ tak terhubung kuat maka matriks A dikatakan tereduksi (Farlow [4], Konigsberg [5]). Farlow [4] dan Tam K. P [10] telah membahas di dalam aljabar Max-Plus beserta tafsirannya dalam teori graf, bahwa nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks masing-masing adalah periode dan barisan dari suatu waktu aktifitas. Farlow [4] membahas khusus untuk matriks tak tereduksi, sedangkan Konigsberg [5] dan Schutter [7] selain membahas matriks tak tereduksi juga matriks tereduksi. Berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen, Siswanto [8] dan Subiono [9] telah membahas tentang algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks dalam aljabar Max-Plus.

Sejalan pada aljabar Max-Plus, muncul pula matriks dalam aljabar Max-Plus interval yaitu $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ dan matriks dalam aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu $F(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$, serta nilai eigen dan vektor eigen matriks dalam aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Rudhito [6] telah membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval khusus untuk matriks tak tereduksi. Dalam makalah ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks tereduksi dalam aljabar Max-Plus interval. Sebelum dibahas hasil utama dari makalah ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

Definisi 1.1. Diberikan barisan $\{x(k) | k \in \mathbb{Z}\}$ yang dibangkitkan oleh sistem persamaan linear $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dengan $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $x(0) \in \mathfrak{R}^n$ sebagai nilai awal. Misalkan $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \in \mathfrak{R}_{\max}^n$ sehingga untuk $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\tau_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k}$ ada. Vektor $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ disebut vektor waktu siklus. Jika semua τ_i sama maka nilai ini disebut laju pertumbuhan asimtotik barisan $x(k)$.

Definisi 1.2. Suatu matriks dikatakan regular jika memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris.

Definisi 1.3. Norma l^∞ untuk vektor $v \in \mathfrak{R}^n$ didefinisikan oleh $\|v\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |v_i|$.

Lema 1.4. [4] Jika $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ matriks regular dan $u, v \in \mathfrak{R}^m$ maka $\|(A \otimes u) - (A \otimes v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$.

Teorema 1.5. [4] Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ reguler dan nilai awal $x(0)$. Jika $x(0)$ nilai awal sehingga $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, x(0))}{k}$ ada maka nilai limit ini sama untuk sebarang nilai awal $y(0) \in \mathfrak{R}^n$.

Lema 1.6. [4] Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi dengan v vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in \mathfrak{R}$ maka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda \text{ untuk semua } j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ dan } x(0) \in \mathfrak{R}^n.$$

Teorema 1.7. [8,9] Jika untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ memenuhi $x(m) = c \otimes x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan bilangan real c maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ dengan $\lambda = \frac{c}{m-n}$. Selanjutnya, λ

adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \otimes x(m+i-1))$.

Selanjutnya, dibicarakan konsep aljabar Max-Plus interval dan matriks di dalamnya [6]. Interval tertutup x dalam $\mathfrak{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathfrak{R}_{\max}$ yang berbentuk $x = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathfrak{R}_{\max} \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \bar{x}\}$. Interval x dalam $\mathfrak{R}_{\max}$ disebut interval Max-Plus. Suatu bilangan $x \in \mathfrak{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$.

Definisi 1.8. Dibentuk $I(\mathfrak{R})_{\max} = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathfrak{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \bar{x}\} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ didefinisikan operasi " $\oplus$ " dan " $\otimes$ " dengan $x \oplus y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ dan $x \otimes y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$ untuk setiap $x, y \in I(\mathfrak{R})_{\max}$. Himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $\bar{0} = [0, 0]$. Selanjutnya disebut aljabar Max-Plus interval dan dinotasikan dengan $I(\bar{\mathfrak{R}})_{\max} = (I(\mathfrak{R})_{\max}; \oplus, \otimes)$.

Definisi 1.10. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dinotasikan dengan $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ yaitu

$I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n} = \{A = [A_{ij}] \mid A_{ij} \in I(\mathfrak{R})_{\max}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$. Matriks anggota $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut matriks interval Max-Plus. Selanjutnya matriks interval Max-Plus cukup disebut dengan matriks interval.

Definisi 1.11. Struktur aljabar dari $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ yang dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dinotasikan dengan $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n} = (I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}; \oplus, \otimes)$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ merupakan semimodul atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$.

Definisi 1.12. Untuk $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = [\underline{A}_{ij}] \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $\bar{A} = [\bar{A}_{ij}] \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A.

Definisi 1.13. Diberikan matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\bar{A}$ masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks A. Didefinisikan interval matriks dari A yaitu $[\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \bar{A}\}$ dan $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b = \{[\underline{A}, \bar{A}] \mid A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}\}$.

Definisi 1.14.

1. Untuk $\alpha \in I(\mathfrak{R})_{\max}$, $[\underline{A}, \bar{A}], [\underline{B}, \bar{B}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$ didefinisikan

- i. $\alpha \otimes [\underline{A}, \bar{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \bar{\alpha} \otimes \bar{A}]$
- ii. $[\underline{A}, \bar{A}] \oplus [\underline{B}, \bar{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \bar{A} \oplus \bar{B}]$

2. Untuk $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times k})_b$, $[\underline{B}, \bar{B}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{k \times n})_b$ didefinisikan

$$[\underline{A}, \bar{A}] \otimes [\underline{B}, \bar{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \bar{A} \otimes \bar{B}].$$

Teorema 1.15. [9] Struktur aljabar dari $I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ yang dilengkapi dengan operasi $\bar{\oplus}$ dan $\bar{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\bar{\mathfrak{R}}_{\max}^{n \times n})_b = (I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b; \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$ merupakan semimodul atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$.

Semiring $I(\bar{\mathfrak{R}}_{\max}^{n \times n}) = (I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}); \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $I(\bar{\mathfrak{R}}_{\max}^{n \times n})_b = (I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b; \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ dengan pemetaan $f : I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}) \rightarrow I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})^*$ $f(A) = [\underline{A}, \bar{A}]$, $\forall A \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})$. Sedangkan semimodul $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})$ atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$ atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$. Dengan demikian untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ dengan $\underline{A}, \bar{A} \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dapat ditentukan matriks interval $A \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})$ dimana $[\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}] = I(\mathfrak{R})_{\max}$ untuk setiap i dan j . Dengan demikian matriks interval $A \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$. Interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ disebut interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval $A \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$. Akibat isomorfisme di atas maka berlaku $\alpha \bar{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \bar{\alpha} \otimes \bar{A}]$, $A \bar{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \bar{A} \oplus \bar{B}]$ dan $A \bar{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \bar{A} \otimes \bar{B}]$.

Definisi 1.16. Didefinisikan

$I(\mathfrak{R})_{\max}^n = \left\{ x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \mid x_i \in I(\mathfrak{R})_{\max}; i = 1, 2, \dots, n \right\}$. Himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}^n$ dapat dipandang sebagai $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times 1}$. Unsur-unsur dalam $I(\mathfrak{R})_{\max}^n$ disebut vektor interval atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$. Vektor interval x bersesuaian dengan interval vektor yaitu $x \approx [\underline{x}, \bar{x}]$.

Definisi 1.17. Diberikan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$. Skalar interval $\lambda \in I(\mathfrak{R})_{\max}$ disebut nilai eigen Max-Plus interval matriks interval A jika terdapat suatu vektor interval $v \in I(\mathfrak{R})_{\max}^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \bar{\otimes} v = \lambda \bar{\otimes} v$. Vektor v disebut vektor eigen Max-Plus interval matriks interval A yang bersesuaian dengan λ . Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen interval Max-Plus suatu matriks interval.

Teorema 1.18. [9] Diberikan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$. Skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\bar{A})]$, merupakan suatu nilai eigen Max-Plus interval matriks interval A , dimana $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\bar{A})$ berturut-turut adalah bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(\underline{A})$ dan $G(\bar{A})$.

Definisi 1.19. Suatu matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, dikatakan tak tereduksi jika setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ tak tereduksi.

Teorema 1.20. [9] Suatu matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, tak tereduksi jika dan hanya $\underline{A} \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi.

Akibat 1.21. [9] Diberikan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$. Jika matriks interval A tak tereduksi maka $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\bar{A})]$ merupakan nilai eigen interval Max-Plus tunggal matriks interval A .

PEMBAHASAN

Misalkan $x(k+1) = A \otimes x(k)$ yaitu sistem persamaan dalam aljabar Max-Plus interval. Akan dibahas hasil penelitian yaitu tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks interval tereduksi reguler. Pembahasan ini berkaitan dengan perilaku periodik dari suatu sistem persamaan dalam aljabar Max-Plus interval, sedangkan perilaku periodik dari suatu sistem persamaan berkaitan dengan vektor interval waktu siklus.

Definisi 2.1. Diberikan barisan $\{x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T \in I(\mathfrak{R})_{\max}^n \mid k \in \square\}$,

$\square$ himpunan bilangan asli yaitu barisan yang dibangkitkan oleh $x(k+1) = A \otimes x(k)$ sehingga untuk $x_j(k) = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\frac{x_j(k)}{k} = \left[\frac{\underline{x}_j}{k}, \frac{\bar{x}_j}{k} \right]$ dan bahwa

$\tau_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k}$ ada. Vektor $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$ disebut vektor interval waktu siklus.

Jika semua τ_i sama maka interval ini disebut laju pertumbuhan asimtotik barisan vektor interval $x(k)$.

Misalkan $\{x(k) \in I(\mathfrak{R})_{\max}^n \mid k \in \square\}$ barisan yang dibangkitkan oleh sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$, dengan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dan $x(0) \in I(\mathfrak{R})^n$ sebagai nilai awal. Barisan $x(k)$ dapat ditulis $x(k) = A^{\otimes k} \otimes x(0)$. Jika A matriks interval tak tereduksi, laju pertumbuhan asimtotik sebarang $x_j(k)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan nilai eigen interval yang tunggal dari A . Selanjutnya, untuk $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi dengan

nilai eigen interval λ dan vektor eigen interval v , maka nilai eigen interval dari $A^{\otimes k}$ adalah $\lambda^{\otimes k}$ dan vektor eigen intervalnya adalah v . Ini dinyatakan dalam lema berikut.

Lema 2.2. Jika v eigen vektor interval dari matriks tak tereduksi $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan nilai eigen interval λ maka $A^{\otimes k} \otimes v = \lambda^{\otimes k} \otimes v$ untuk semua $k \geq 0$.

Bukti : Diperhatikan bahwa untuk $n \geq 0$ berlaku :

$$\begin{aligned} A \otimes (\lambda^{\otimes n} \otimes v) &= (A \otimes \lambda^{\otimes n}) \otimes v = (\lambda^{\otimes n} \otimes A) \otimes v = \lambda^{\otimes n} \otimes (A \otimes v) \\ &= \lambda^{\otimes n} \otimes (\lambda \otimes v) \\ &= \lambda^{\otimes (n+1)} \otimes v. \end{aligned}$$

Selanjutnya, bukti lema dilakukan dengan induksi matematika.

- i. Untuk $k = 1$, $A^{\otimes 1} \otimes v = \lambda^{\otimes 1} \otimes v \Leftrightarrow A \otimes v = \lambda \otimes v$
- ii. Dianggap benar untuk $k = n - 1$, yaitu $A^{\otimes (n-1)} \otimes v = \lambda^{\otimes (n-1)} \otimes v$
- iii. Untuk $k = n$, $A \otimes (\lambda^{\otimes (n-1)} \otimes v) = \lambda^{\otimes n} \otimes v \Leftrightarrow A \otimes (A^{\otimes (n-1)} \otimes v) = \lambda^{\otimes n} \otimes v$
 $\Leftrightarrow (A \otimes A^{\otimes (n-1)}) \otimes v = \lambda^{\otimes n} \otimes v$
 $\Leftrightarrow A^{\otimes n} \otimes v = \lambda^{\otimes n} \otimes v$

Dari i, ii dan iii terbukti, $A^{\otimes k} \otimes v = \lambda^{\otimes k} \otimes v$ untuk semua $k \geq 0$. ■

Dari lema 2.2, yaitu $A^{\otimes k} \otimes v = \lambda^{\otimes k} \otimes v$ dan dari $x(k) = A^{\otimes k} \otimes x(0)$, jika $\bar{x}(0)$ dipilih v suatu vektor eigen interval maka $\bar{x}(k) = A^{\otimes k} \otimes \bar{x}(0) \Leftrightarrow x(k) = A^{\otimes k} \otimes v \Leftrightarrow x(k) = \lambda^{\otimes k} \otimes v$. Dengan menggunakan operasi di dalam aljabar konvensional bahwa, jika $\bar{\lambda} = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda]^T$ maka $x(k) = k \bar{\lambda} + v \Leftrightarrow x(k) - v = k \bar{\lambda}$
 $\Leftrightarrow x(k) - v = [k\lambda, k\lambda, \dots, k\lambda]^T$ sehingga berlaku $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{x_j(k)}{k} - \frac{v_j}{k} \right) = \lambda$ atau

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k} = \lambda$ untuk $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Oleh karena itu, jika $x(0) = v$ yang merupakan

vektor eigen interval maka laju pertumbuhan asimtotik dari $x(k)$ adalah nilai eigen interval yang bersesuaian dengan vektor eigen interval v dari matriks interval A . Selanjutnya, bagaimana jika barisan $x(k)$ diberikan nilai awal selain vektor eigen interval dari A .

Untuk pembicaraan ini, diperlukan norma l^∞ yang dimodifikasi untuk vektor interval $v \in I(\mathcal{R})^n$ dan beberapa lema.

Definisi 2.3. Untuk $n = 1$, berarti $v = [\underline{v}, \bar{v}] \in I(\mathcal{R})$. Didefinisikan

$$\|v\|_\infty = \begin{cases} \bar{v} - \underline{v}, & \text{untuk } \underline{v} \neq \bar{v} \\ |\underline{v}| & \text{untuk } v = \underline{v} = \bar{v} \end{cases}.$$

Lema 2.4. Misalkan $v = [\underline{v}, \bar{v}] \in I(\mathcal{R})$ maka $\|v\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.3 merupakan norma dari $v \in I(\mathcal{R})$.

Bukti : Ambil $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathcal{R})$ dan $\alpha \in \mathcal{R}$.

i. a. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$ dengan $\underline{v} \neq \bar{v}$ maka

$$\|\alpha v\|_\infty = \|[\alpha \underline{v}, \alpha \bar{v}]\|_\infty = \alpha \bar{v} - \alpha \underline{v} = \alpha(\bar{v} - \underline{v}) = \alpha \|[\underline{v}, \bar{v}]\|_\infty = \alpha \|v\|_\infty.$$

b. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$ dengan $v = \underline{v} = \bar{v}$ maka

$$\|\alpha v\|_\infty = \|[\alpha \underline{v}, \alpha \bar{v}]\|_\infty = |\alpha v| = \alpha |v| = \alpha \|v\|_\infty.$$

Jadi $\|\alpha v\|_\infty = \alpha \|v\|_\infty$.

ii. a. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathcal{R})$ dengan $\underline{v} \neq \bar{v}$ dan $\underline{w} \neq \bar{w}$ maka

$$\begin{aligned} \|v+w\|_\infty &= \|[\underline{v}, \bar{v}] + [\underline{w}, \bar{w}]\|_\infty = \|[\underline{v} + \underline{w}, \bar{v} + \bar{w}]\|_\infty = \bar{v} + \bar{w} - (\underline{v} + \underline{w}) \\ &= (\bar{v} - \underline{v}) + (\bar{w} - \underline{w}) \\ &= \|v\|_\infty + \|w\|_\infty. \end{aligned}$$

b. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathcal{R})$ dengan $v = \underline{v} = \bar{v}$ dan $w = \underline{w} = \bar{w}$ maka

$$\|v+w\|_\infty = \|[\underline{v}, \bar{v}] + [\underline{w}, \bar{w}]\|_\infty = \|[\underline{v} + \underline{w}, \bar{v} + \bar{w}]\|_\infty = |v+w| \leq |v| + |w| = \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

c. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathcal{R})$ dengan $\underline{v} \neq \bar{v}$ dan $w = \underline{w} = \bar{w}$ maka

$$\begin{aligned} \|v+w\|_\infty &= \|[\underline{v}, \bar{v}] + [\underline{w}, \bar{w}]\|_\infty = \|[\underline{v} + \underline{w}, \bar{v} + \bar{w}]\|_\infty = |\bar{v} + \bar{w} - (\underline{v} + \underline{w})| \\ &= |\bar{v} - \underline{v}| \\ &= \|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \end{aligned}$$

Jadi, $\|v+w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

iii. $\|v\|_\infty \geq 0$, $\forall v \in I(\mathcal{R})$ dan $\|v\|_\infty = 0 \Leftrightarrow v = 0 = [0,0]$.

Selanjutnya untuk $n \geq 2$, disajikan definisi dan lema berikut.

Definisi 2.5. Untuk setiap vektor interval $v \in I(\mathcal{R})^n$, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ dengan

$v_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan

$$\|v\|_\infty = \begin{cases} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\underline{v}_i - \bar{v}_i|, & \text{jika } \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni \underline{v}_i \neq \bar{v}_i \\ \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i|, & \text{jika } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni \underline{v}_i = \bar{v}_i \end{cases}.$$

Lema 2.6. Misalkan vektor interval $v \in I(\mathcal{R})^n$, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ dengan $v_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ maka $\|v\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.5 merupakan norma dari $v \in I(\mathcal{R})^n$.

Bukti : Ambil $v, w \in I(\mathcal{R})^n$ dan $\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$

i. a. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i \neq \bar{v}_i$.

Berarti,

$$\alpha v = [[\alpha v_1, \alpha \bar{v}_1], [\alpha v_2, \alpha \bar{v}_2], \dots, [\alpha v_n, \alpha \bar{v}_n]]^T = [[\alpha v_1, \alpha \bar{v}_1], [\alpha v_2, \alpha \bar{v}_2], \dots, [\alpha v_n, \alpha \bar{v}_n]]^T$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga, } \|\alpha v\|_{\infty} &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\alpha \bar{v}_i - \alpha v_i| = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\alpha| |\bar{v}_i - v_i| \\ &= |\alpha| \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i - v_i| = |\alpha| \|v\|_{\infty}. \end{aligned}$$

b. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i = \bar{v}_i$.

Berarti,

$$\alpha v = [[\alpha v_1, \alpha \bar{v}_1], [\alpha v_2, \alpha \bar{v}_2], \dots, [\alpha v_n, \alpha \bar{v}_n]]^T = [[\alpha v_1, \alpha \bar{v}_1], [\alpha v_2, \alpha \bar{v}_2], \dots, [\alpha v_n, \alpha \bar{v}_n]]^T$$

$$\text{sehingga, } \|\alpha v\|_{\infty} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\alpha \bar{v}_i| = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\alpha| |\bar{v}_i| = |\alpha| \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i| = |\alpha| \|v\|_{\infty}.$$

$$\text{Jadi } \|\alpha v\|_{\infty} = \alpha \|v\|_{\infty}.$$

ii. a. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i \neq \bar{v}_i$ dan dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni w_i \neq \bar{w}_i$.

Berarti,

$$v + w = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$$

$$+ [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$$

$$= [[v_1 + w_1, \bar{v}_1 + \bar{w}_1], [v_2 + w_2, \bar{v}_2 + \bar{w}_2], \dots, [v_n + w_n, \bar{v}_n + \bar{w}_n]]^T$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga, } \|v+w\|_{\infty} &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |(\bar{v}_i + \bar{w}_i) - (v_i + w_i)| \\ &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |(\bar{v}_i - v_i) + (\bar{w}_i - w_i)| \\ &\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i - v_i| + \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{w}_i - w_i| = \|v\|_{\infty} + \|w\|_{\infty}. \end{aligned}$$

b. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i = \bar{v}_i$ dan dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni w_i = \bar{w}_i$.

Berarti,

$$v + w = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$$

$$+ [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$$

$$= [[v_1 + w_1, \bar{v}_1 + \bar{w}_1], [v_2 + w_2, \bar{v}_2 + \bar{w}_2], \dots, [v_n + w_n, \bar{v}_n + \bar{w}_n]]^T$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga, } \|v+w\|_{\infty} &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i + \bar{w}_i| \\ &\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i| + \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{w}_i| = \|v\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty} + \|w\|_{\infty} \end{aligned}$$

c. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i \neq \bar{v}_i$ dan

dan $w = [[\underline{w}_1, \bar{w}_1], [\underline{w}_2, \bar{w}_2], \dots, [\underline{w}_n, \bar{w}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni \underline{w}_i = \bar{w}_i$.

Berarti, $v + w = [[\underline{v}_1, \bar{v}_1], [\underline{v}_2, \bar{v}_2], \dots, [\underline{v}_n, \bar{v}_n]]^T$

$$+ [[\underline{w}_1, \bar{w}_1], [\underline{w}_2, \bar{w}_2], \dots, [\underline{w}_n, \bar{w}_n]]^T \\ = [[\underline{v}_1 + \underline{w}_1, \bar{v}_1 + \bar{w}_1], [\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \bar{v}_2 + \bar{w}_2], \dots, [\underline{v}_n + \underline{w}_n, \bar{v}_n + \bar{w}_n]]^T$$

$$\text{sehingga, } \|v+w\|_{\infty} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |(\bar{v}_i + \bar{w}_i) - (\underline{v}_i + \underline{w}_i)| \\ = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |(\bar{v}_i - \underline{v}_i) + (\bar{w}_i - \underline{w}_i)| \\ = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i - \underline{v}_i| = \|v\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty} + \|w\|_{\infty}$$

Jadi, $\|v+w\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty} + \|w\|_{\infty}$.

iii. $\|v\|_{\infty} \geq 0$, $\forall v \in I(\mathcal{R})^n$ dan $\|v\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow v = [[0,0], [0,0], \dots, [0,0]]^T$

Oleh karena itu, $\|v\|_{\infty}$ yang didefinisikan pada definisi 2.3 dan definisi 2.5

merupakan norma dari $v \in I(\mathcal{R})^n$.

Definisi 2.7. Suatu matriks interval $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, dikatakan regular jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ regular.

Lema 2.8. Matriks interval $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$ dikatakan regular jika dan hanya jika $\underline{A} \in \mathcal{R}_{\max}^{n \times n}$ regular.

Bukti : ($\Rightarrow$) Menurut definisi 2.7, karena $\underline{A} \in [\underline{A}, \bar{A}]$ maka $\underline{A}$ regular.

($\Leftarrow$) Diketahui $\underline{A}$ regular, berarti memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris. Ambil $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ sebarang. berarti $\underline{A} \preceq_m A$. Oleh karena itu, A memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris. Dengan kata lain A regular. Karena A sebarang maka setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ regular.

Lema 2.9. Jika $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{m \times n}$ matriks regular dan $u, v \in I(\mathcal{R})^m$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, $u \approx [\underline{u}, \bar{u}]$ dan $v \approx [\underline{v}, \bar{v}]$ maka $\|(A \otimes u) - (A \otimes v)\|_{\infty} \leq \|u - v\|_{\infty}$.

Bukti : Misalkan $A \otimes u$ dan $A \otimes v$ vektor interval berhingga dalam $I(\mathcal{R})^m$ dengan $A \otimes u \approx [\underline{A} \otimes \underline{u}, \bar{A} \otimes \bar{u}]$ dan $A \otimes v \approx [\underline{A} \otimes \underline{v}, \bar{A} \otimes \bar{v}]$. Bukti diberikan untuk kasus jika $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni (\underline{A} \otimes \underline{u})_i \neq (\bar{A} \otimes \bar{u})_i$ dan $(\underline{A} \otimes \underline{v})_i \neq (\bar{A} \otimes \bar{v})_i$, sedangkan untuk kasus jika $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni (\underline{A} \otimes \underline{u})_i = (\bar{A} \otimes \bar{u})_i$ dan $(\underline{A} \otimes \underline{v})_i = (\bar{A} \otimes \bar{v})_i$ sejalan bukti Teorema 1.4. didefinisikan $\beta = \|(A \otimes u) - (A \otimes v)\|_{\infty}$. Berarti bahwa, ada $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ sehingga $\beta = \left| [(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v})]_{i_0} - [(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v})]_{i_0} \right|$. Oleh

karena itu, i_0 adalah indeks dari elemen dalam $\left[(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v}) \right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v}) \right]_{i_0}$ dengan nilai mutlak maksimum.

Tanpa kehilangan keumuman misalkan bahwa $\beta = \left[(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v}) \right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v}) \right]_{i_0} \geq 0$. Menurut perkalian matrik dalam aljabar Max-Plus, berarti

$$\beta = \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} ((\bar{a}_{i_0 j} + \bar{u}_j) - (\bar{a}_{i_0 j} + \bar{v}_j)) - \max_{l \in \{1, 2, \dots, n\}} ((\underline{a}_{i_0 j} + \underline{u}_j) - (\underline{a}_{i_0 j} + \underline{v}_j)).$$

Oleh karena itu, ada suatu $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga,

$$\begin{aligned} \beta &= ((\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{u}_{j_0}) - (\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{v}_{j_0})) - \max_{l \in \{1, 2, \dots, n\}} ((\underline{a}_{i_0 j} + \underline{u}_j) - (\underline{a}_{i_0 j} + \underline{v}_j)) \\ &\leq ((\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{u}_{j_0}) - (\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{v}_{j_0})) - ((\underline{a}_{i_0 j_0} + \underline{u}_{j_0}) - (\underline{a}_{i_0 j_0} + \underline{v}_{j_0})) \\ &= (\bar{u}_{j_0} - \bar{v}_{j_0}) - (\underline{u}_{j_0} - \underline{v}_{j_0}) \end{aligned}$$

Ini mengakibatkan bahwa,

$$\begin{aligned} \beta &\leq (\bar{u}_{j_0} - \bar{v}_{j_0}) - (\underline{u}_{j_0} - \underline{v}_{j_0}) \leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} (\bar{u}_j - \bar{v}_j) - (\underline{u}_j - \underline{v}_j) \\ &\leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} |(\bar{u}_j - \bar{v}_j) - (\underline{u}_j - \underline{v}_j)| = \|u - v\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Terbukti, $\|(A \otimes u) - (A \otimes v)\|_{\infty} \leq \|u - v\|_{\infty}$. ■

Dalam teorema berikutnya, dipandang $x(0)$ tidak perlu merupakan vektor eigen interval dari A . Notasi $x(k, x(0))$ menyatakan vektor interval $x(k)$ dimulai dengan $x(0)$.

Lema 2.10. Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ reguler dan nilai awal $x(0)$. Jika $x(0)$ mengakibatkan $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, x(0))}{k}$ ada maka nilai limit ini sama untuk sebarang nilai awal $y(0) \in I(\mathcal{R})^n$.

Bukti : Misalkan bahwa, $x(0) \in I(\mathcal{R})^n$ dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, x(0))}{k} = \tau$ dengan $\tau \in I(\mathcal{R})^n$.

Oleh karena itu, untuk sebarang $y(0) \in I(\mathcal{R})^n$ diperoleh,

$$0 \leq \left\| \frac{x(k, y(0))}{k} - \frac{x(k, x(0))}{k} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{k} \left\| (A^{\otimes k} \otimes y(0)) - (A^{\otimes k} \otimes x(0)) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{k} \|y(0) - x(0)\|_{\infty}$$

Untuk $k \rightarrow \infty$ maka $\frac{1}{k} \|y(0) - x(0)\|_{\infty} \rightarrow 0$ dan $\left\| \frac{x(k, y(0))}{k} - \frac{x(k, x(0))}{k} \right\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Akibatnya $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, y(0))}{k} = \tau$. ■

Menurut teorema ini, untuk suatu matriks interval regular jika vektor waktu sikel ada maka vektor ini tidak tergantung dari nilai awal. Selanjutnya, untuk suatu matriks tak tereduksi A , lema berikut menjamin eksistensi vektor waktu sikelnya. Menurut lema

2.10 dan lema 2.2, bahwa semua komponen vektor waktu sikelnnya adalah λ untuk sebarang nilai awal.

Lema 2.11. Diberikan sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi dengan v vektor eigen interval yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in I(\mathfrak{R})$ maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda$ untuk semua $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $x(0) \in I(\mathfrak{R})^n$.

Bukti : Misalkan v suatu vektor eigen dari matriks interval A . Jika dipilih $x(0) = v \in I(\mathfrak{R})^n$ diperoleh $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda$ untuk semua j . Karena A tak tereduksi maka A reguler dan v berhingga. Menurut lema 2.10, vektor waktu sikel ada dan tidak tergantung dari $x(0)$. Dengan kata lain semua komponen vektor waktu sikelnnya adalah λ untuk sebarang nilai awal. ■

Berdasarkan uraian sebelumnya, eksistensi nilai eigen interval dan vektor eigen interval untuk matriks interval tereduksi diberikan oleh teorema berikut :

Teorema 2.12. Jika untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ memenuhi $x(m) = c \bar{\otimes} x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval c maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda]^T$ dengan $\lambda = \frac{c}{m-n}$. Selanjutnya, λ adalah suatu nilai eigen interval dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))$.

Bukti : Diketahui bahwa untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ memenuhi $x(m) = c \bar{\otimes} x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval c . Misalkan $l = m - n$, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x(n+il)}{n+il} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c^{\bar{\otimes} i} \bar{\otimes} x(n)}{n+il} = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c^{\bar{\otimes} i}}{n+il} \right) \bar{\otimes} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{n+il} \right) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{ci}{n+il} \right) \bar{\otimes} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{n+il} \right) = \frac{c}{l} \bar{\otimes} \bar{0} = \frac{c}{m-n} \bar{\otimes} \bar{0}. \text{ Jadi jika } \lambda = \frac{c}{m-n} \text{ maka} \end{aligned}$$

vektor waktu sikelnnya adalah $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda]^T$.

Selanjutnya, jika $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes(m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))$ maka

$$\begin{aligned}
 A \bar{\otimes} v &= A \bar{\otimes} \left(\bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes(m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \right) \\
 &= \bigoplus_{i=1}^{m-n} (A \bar{\otimes} (\lambda^{\otimes(m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))) \\
 &= \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes(m-n-1)} \bar{\otimes} (A \bar{\otimes} x(n+i-1))) \\
 &= \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes(m-n-1)} \bar{\otimes} (x(n+i))) \\
 &= \bigoplus_{i=2}^{m-n+1} (\lambda^{\otimes(m-n-i-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \\
 &= \lambda \bar{\otimes} \left(\bigoplus_{i=2}^{m-n+1} (\lambda^{\otimes(m-n-i)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \right) \\
 &= \lambda \bar{\otimes} \left(\bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes(m-n-i)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \right) = \lambda \bar{\otimes} v. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema ini, berikut adalah langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dilakukan secara berulang dari sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ sebagai berikut :

Ambil sebarang vektor $x(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$.

- i. Lakukan iterasi sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ sampai terdapat bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval sehingga perilaku periodik terjadi yaitu $x(m) = c \bar{\otimes} x(n)$.
- ii. Hitung nilai eigen $\lambda = \frac{c}{m-n}$.
- iii. Vektor eigen $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes(m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))$.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

- a. Matriks interval tereduksi regular A mempunyai nilai eigen interval dan vektor eigen interval jika vektor interval waktu sikelnnya merupakan laju pertumbuhan asimtotik barisan $x(k)$ dari sistem persamaan linear $x(k+1) = A \otimes x(k)$.
- b. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval tersebut berturut-turut adalah nilai eigen Max-Plus matriks batas bawah dan nilai eigen Max-Plus matriks batas atas dari matriks intervalnya.
- c. Batas bawah dan batas atas vektor eigen interval tersebut berturut-turut adalah vektor eigen matriks batas bawah dan vektor eigen matriks batas atas dari matriks intervalnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. P., and Viot, M. 1994. Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Zurich, Switzerland.
- [2] Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. 2001. *Synchronization and Linearity*, New York : John Wiley & Sons.
- [3] Butkovic, P., Tam K. P., 2009. On Some Properties of The Image of a Max Linear Mapping. *Contemporary Mathematics*. Volume 495.
- [4] Farlow, K. G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics.
- [5] Konigsberg Z. R. 2009. A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra. *International Mathematical Forum*, 4. 24. 1157 – 1171.
- [6] Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.
- [7] Schutter, B. D. 1996. *Max Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. Ph.D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Departement Elektrotechniek.
- [8] Siswanto. 2012. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen suatu Matriks Tereduksi dalam Aljabar Max-Plus*. Prosiding Seminar Nasional Aljabar 2012 Jurusan Matematika UNDIP. 152 – 161.
- [9] Subiono. 2000. *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, Published by Delf University Press.
- [10] Tam. K. P. 2010. *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*. A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD).