



ISSN : 2087 - 0922
Vol. 4 No. 1,15 Juni 2013

PROSIDING

Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains VIII “ Pembelajaran Sains yang Menarik dan Menantang”

Tema :

“Memajukan Dukungan Sains dan Matematika
pada Dunia Bisnis, Industri dan Pendidikan”

Editor:

Tundjung Mahatma, M.Kom.
Adita Sutresno, M.Sc.
Dewi Kumlaningsih A.K.H., SSI, M.S

Bidang:
☐ Fisika ☐ Kimia ☐ Matematika
☐ Pendidikan Fisika ☐ Pendidikan Matematika

Fakultas Sains dan Matematika-Universitas Kristen Satya Wacana
Jl.Diponegoro 52-60 Salatiga 50715 Telp.0298-7100396
Fax.0298-321433

PROSIDING SEMINAR NASIONAL SAINS DAN PENDIDIKAN SAINS VIII

Dewan Redaksi/Editor :

Tundjung Mahatma, S.Pd, M.Kom

Adita Sutresno, S.Si, M.Sc

Dewi Kurnianingsih A.K.H, S.Si, M.S

Alamat Redaksi :

Fakultas Sains dan Matematika

Universitas Kristen Satya Wacana

Jl. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711 Telp 0298-321212 ext 368/Fax : 0298-321433

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur pantas kita panjatkan ke hadirat Tuhan, yang karena anugerahNya maka Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains ke-8 dapat terlaksana. Seminar ini dilaksanakan juga dalam rangka peringatan Dies Natalis yang ke 21 Fakultas Sains dan Matematika (FSM) Universitas Kristen Satya Wacana yakni tanggal 8 Juni 2013. Seminar yang bertema "**Pembelajaran Sains yang Menarik dan Menantang**" tahun ini diberi sub-tema Memajukan Dukungan Sains dan Matematika pada Dunia Bisnis, Industri dan Pendidikan.

Seminar menghadirkan Pembicara-pembicara utama yang terpilih dari bidangnya, yaitu:

1. Kimia: Bapak Muhamad A. Martoprawiro, Ph.D. ; Institut Teknologi Bandung;
2. Matematika: Dr. Sutanto, S.Si. DEA; Universitas Negeri Sebelas Maret Surakarta;
3. Fisika: Prof.Dr. Wahyu Setia Budi, MS.; Universitas Diponegoro.

Sebagai suatu wahana ilmiah untuk mengkomunikasikan temuan-temuan riset dan pengalaman, seminar ini mengundang partisipasi kaum akademisi maupun periset dari lembaga-lembaga riset dan pengembangan teknologi. Terdaftar 175 orang peserta, dari antaranya terdaftar 76 makalah.

Atas nama seluruh anggota Panitia, saya sampaikan ucapan terima kasih yang tulus kepada para Pembicara Utama, Pemakalah, dan Peserta yang berpartisipasi aktif dalam Seminar ini. Semoga Seminar ini benar-benar dapat menjadi masukan untuk pengembangan bidang Sains dan Matematika, khususnya dalam rangka mendukung pendaya-gunaan ilmu dan meningkatkan relevansinya terhadap dunia bisnis, industri, serta pembelajaran, seperti tujuan yang sudah ditetapkan.

Meskipun Seminar Nasional ini sudah dirancang jauh-jauh hari sebelum pelaksanaannya, tetapi tentu tidak lepas dari kekurangan dan kesalahan. Untuk itu dengan kerendahan hati kami memohon maaf.

Terima kasih.

Salatiga, 15 Juni 2013

Tundjung Mahatma S.Pd, M.Kom
Ketua Panitia

SAMBUTAN DEKAN

Puji syukur kita panjatkan kepada Tuhan yang Maha Esa atas anugerahNya besar sehingga seminar ini dapat dipersiapkan, dirancang dan hari ini diselenggarakan dengan baik. Sebagai Dekan saya mewakili keluarga besar FSM menyampaikan rasa terima kasih sebesar-besarnya bagi Rektor UKSW yang telah mendukung acara ini secara konsisten dari tahun-tahun lalu, hingga seminar yang ke VIII ini, juga kepada segenap panitia seminar yang telah membuktikan kegigihannya dalam mempersiapkan seminar juga kepada para pembicara utama. Kimia: Bapak Muhamad A. Martoprawiro, Ph.D. ; Institut Teknologi Bandung Matematika: Dr. Sutanto, S.Si. DEA; Universitas Negeri Sebelas Maret Surakarta; Fisika: Prof.Dr. Wahyu Setia Budi, MS.; Universitas Diponegoro dan para kontribusi makalah pararel yang datang dari berbagai penjuru tanah air, dari Perguruan Tinggi, Instansi, maupun sekolah-sekolah, juga dari pada donator Tiara Jaya, PLN dan lainnya, serta terima kasih untuk segenap hadirin.

Seminar ini selalu dibuat tiap tahun di FSM UKSW untuk menggalang berbagai ide-ide ilmiah dari skala atom sampai alam semesta, dan teori fundamental sampai teknologi tepat guna, dengan harapan bahwa pemikiran-pemikiran ilmiah ini akan berguna bagi umat manusia kelak. Pasti tidak ada hasil yang sempurna, untuk itu para peneliti dan hadirin dimohon untuk saling berinteraksi untuk memperkaya karya-karya ilmiah ini. Tidak ada karya yang salah, karena semua sedang dalam proses mencari tahu rahasia alam semesta ini. Dan akhirnya berujung pada pemahaman bahwa Tuhan Pencipta Alam adalah yang Maha Kuasa.

Kami menyadari bahwa penyelenggaraan seminar ini pasti mengandung banyak kelemahan, kekurangan maupun cacat dibanyak segi. Mohon maaf sebesar-besarnya untuk ini. Semoga tahun-tahun berikutnya kualitas seminar dapat ditingkatkan seiring dengan rencana FSM untuk membuka program-program studi yang baru, yaitu S2 Pendidikan Fisika dan S1 Pendidikan Kimia, mohon doa restu untuk rencana ini..

Akhir kata selamat berseminar semoga mendapat pencerahan dan ide-ide ilmiah penting, dan selamat berkarya.

Terima kasih

Salatiga, 15 Juni 2013

Dr. Suryasatriya Trihandaru, S.Si, M.Sc.nat
Dekan FSM

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Sambutan Dekan	ii
Susunan Acara	iii
Daftar Isi	iv

	Halaman
PEMBICARA UTAMA	
1 TANTANGAN PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN DAN RISET KIMIA PADA PENDIDIKAN TINGGI SAINS Muhamad Martoprawiro, PhD	1-12
2 MATH BEHIND THE MADNESS : Ekonomi Berbasis <i>Mass Colaboration</i> Dr. Sutanto, S.Si, DEA	13-22
3 PENDIDIKAN DAN PERAN FISIKAWAN MEDIK DALAM ELAYANAN KESEHATAN Prof.Dr. Wahyu Setia Budi, M.S	23-29
BIDANG PENDIDIKAN FISIKA	
1 “GenDerAng” SEBAGAI MODEL PEMBELAJARAN YANG DAPAT MENINGKATKAN MINAT DAN PEMAHAMAN KONSEP FISIKA SISWA PEREMPUAN SMA AVICENNA CINERE Acep Musliman, Agus Setiawan, Andi Suwandi, Ida Hamidah	1-9
2 IDENTIFIKASI KESULITAN BELAJAR MAHASISWA DALAM KONTEN MATEMATIKA PADA MATERI PENDAHULUAN FISIKA INTI Cicylia Triratna Kereh, Jozua Sabandar	10-17
3 IDENTIFIKASI KONSEP FISIKA MENGENAI CAHAYA YANG TERDAPAT DI DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI Nimang Soraya, Marmi Sudarmi, Ferdy S. Rondonuwu	18-28
4 GAME ANGRY BIRDS DAN PROGRAM TRACKER SEBAGAI MEDIA PEMBELAJARAN FISIKA PADA TOPIK GERAK PARABOLA Deasyana Rismala Sari, Marmi Sudarmi, Diane Noviandini	29-38
5 IMPLEMENTASI HASIL IDENTIFIKASI KETERKAITAN KONSEP DASAR FISIKA TENTANG GAYA DENGAN KEGIATAN YANG SERING DIJUMPAI SISWA SEKOLAH DASAR Lani Prabawati, Diane Noviandini, Ferdy S. Rondonuwu	39-46
6 PENGEMBANGAN LKS SAINS BERBASIS KERJA LABORATORIUM UNTUK MENINGKATKAN KETERAMPILAN PROSES DAN HASIL BELAJAR SISWA SMP MUHAMMADIYAH MUNTILAN Muhammad Minan Chusni dan Widodo	47-57

7	PENERAPAN METODE PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE TIPE GROUP INVESTIGATION PADA MATERI LENS CEMBUNG	58-67
	Sahidah, Marmi Sudarmi, Made Rai Suci Shanti NurAyub	
8	ANALISIS KESULITAN KONSEP STRUKTUR KRISTAL PADA PERKULIAHAN FISIKA ZAT PADAT BAGI CALON GURU FISIKA	68-73
	Hera Novia, Dadi Rusdiana, Ida Kaniawati	
9	MODEL PEMBELAJARAN <i>JUST-IN-TIME TEACHING</i> (JITT) UNTUK MENINGKATKAN KETERAMPILAN PROSES SAINS SISWA SMP PADA MATERI HUKUM NEWTON	74-79
	Jayus Riyadi Solikhin.....	
10	PEMBELAJARAN FISIKA MENGGUNAKAN MODUL DAN BULETIN BERBASIS MASALAH DITINJAU DARI MOTIVASI BELAJAR SISWA	80-85
	Siti Fatimah	
11	PENINGKATKAN PERAN AKTIF SISWA DALAM PEMBELAJARAN FISIKA MENGGUNAKAN MODEL PEMBELAJARAN COGENERATIVE DIALOGUE DI SMK NEGERI 1 BAWANG TAHUN 2012/2013	86-91
	Wahyu Novitasari, Widodo.....	
12	DESAIN METODE PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE PHYSICS CLEBO TOURNAMENT PADA MATERI FISIKA TENTANG CERMIN DATAR	92-102
	Krispina Marjayanti, Marmi Sudarmi, Diane Noviandini.....	
13	IMPLEMENTASI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE SNAKES AND LADDERS GAME PADA PEMBELAJARAN TENTANG CERMIN CEKUNG	103-113
	Miyati,Marmi Sudarmi, Diane Noviandini.....	
14	DESAIN PENGEMBANGAN PROGRAM <i>E-TRAINING</i> FISIKA UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN KONSEP DAN KEMAMPUAN MENGANALISIS GURU SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)	114-120
	Slamet Mugiono, I Made Alit Mariana	
15	PENGUNAAN METODE OPEN INQUIRY UNTUK MEMPERBAIKI KUALITAS PRAKTIKUM ELEKTRONIKA DASAR	121 - 132
	Sri Jumini	
16	PENGARUH PERBEDAAN PANJANG POROS SUATU BENDA TERHADAP KECEPATAN SUDUT PUTAR	133- 138
	Sri Jumini, LilisMuhlisoh	

BIDANG PENDIDIKAN MATEMATIKA

17	UPAYA MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMECAHAN	139-148
----	---	---------

	MASALAH DAN PEMAHAMAN MATEMATIKA SISWA MELALUI STRATEGI KOOPERATIF TIPE TGT (TEAMS GROUP TOURNAMENT)	
	Panusunan Tampubolon	
18	MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-MIN INTERVAL M. Andy Rudhito	149-156
19	PENGARUH PENGGUNAAN PROGRAM CABRI 3D TERHADAP PEMAHAMAN SISWA DALAM MENENTUKAN JARAK TITIK KE GARIS PADA RUANG UNTUK SISWA KELAS X SMA Fransisca Romana Andriyati, M. Andy Rudhito	157-164
20	EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN MENGGUNAKAN PROGRAM CABRI 3D DALAM MENINGKATKAN HASIL BELAJAR SISWA TENTANG SUDUT GARIS DAN BIDANG DI KELAS X Gisza Priska Amalia, M. Andy Rudhito	165-173
21	EFEKTIVITAS CABRI 3D DALAM METODE PEMBELAJARAN INKUIRI TERHADAP KEMAMPUAN BERPIKIR GEOMETRI BERDASARKAN VAN HIELE SISWA SMP POKOK BAHASAN PRISMA DAN LIMAS Sujud Fadhilah, M. Andy Rudhito	174-183
22	EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN DENGAN PROGRAM CABRI 3D DITINJAU DARI HASIL BELAJAR DALAM POKOK BAHASAN LUAS PERMUKAAN KUBUS DAN BALOK DI KELAS VIII B Deni Candra Pamungkas, M. Andy Rudhito	184-194
23	PEMANFAATAN PROGRAM GEOGEBRA DALAM UPAYA MENINGKATKAN PEMAHAMAN PADA POKOK BAHASAN SEGITIGA DITINJAU DARI HASIL BELAJAR SISWA KELAS VII Adi Suryobintoro, M. Andy Rudhito	195-205
24	PERBEDAAN KONEKSI MATEMATIKA ANTARA SISWA YANG DIBERI PEMBELAJARANKOOPERATIF TIPE JIGSAW DAN PENGAJARAN LANGSUNG Jahinoma Gultom	206-216
25	EFEKTIFITAS PEMANFAATAN PROGRAM GEOGEBRA PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA DALAM UPAYA MEMBANTU PEMAHAMAN MATERI TURUNAN Andreas Ricky Proklamanto, M. Andy Rudhito	217-226
26	PEMANFAATAN PROGRAM CABRI 3D DALAM PENINGKATAN KEMAMPUAN BERPIKIR GEOMETRI MATERI LUAS PERMUKAAN DAN VOLUME LIMAS MODEL PBI KELAS VIII Nina Kristin Wulan Anggar Wati, M. Andy Rudhito	227-234
27	PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN TOPIK PECAHAN DI SEKOLAH DASAR Sugiarto Pudjohartono, Sardjana,A	235-245

28	EFEKTIFITAS PEMANFAATAN PROGRAM GEOGEBRA DALAM UPAYA MEMBANTU PEMAHAMAN MATERI LUAS DAN KELILING SEGIEMPAT UNTUK SISWA KELAS VII	246-257
	Yustinus Dwi Arinto, M. Andy Rudhito	
29	PEMANFAATAN PROGRAM CABRI 3D DALAM PENINGKATAN HASIL BELAJAR PADA POKOK BAHASAN KEDUDUKAN TITIK, GARIS, DAN BIDANG DALAM RUANG DIMENSI TIGA KELAS X	258-269
	Merry Larasati, M. Andy Rudhito	
BIDANG FISIKA		
30	DETERMINATION FOR WHITE-LIGHT TELESCOPE k-CONSTANT AT LANGKAWI BY COMPARING TO WATUKOSEK WHITE-LIGHT TELESCOPE	270-274
	Bambang Setiahadi, Farahana Kamarudin, Nor Rafidah Saibaka, Mohammad Redzuan Tahar, Karzaman, Fairas Asyilam	
31	STUDI PENGARUH SINTERING TERHADAP SPEKTROSKOPI IMPEDANSI Ba_{0,5}Sr_{0,5}TiO₃	275-280
	Dwi Nugraheni Rositawati	
32	PENGUJIAN PENGARUH PENAMBAHAN MATERIAL PENGOTOR OLI BEKAS SEBAGAI IDENTIFIKASI KANDUNGAN ENERGI PADA OLI MURNI	281-287
	Roy Hudoyo, Made Rai Suci Shanti, N. A, Andreas Setiawan	
33	FABRIKASI SEL SURYA PEWARNA TERSENSITISASI (SSPT) DENGAN MEMANFAATKAN EKSTRAK ANTOSIANIN UBI JALAR UNGU (<i>Ipomoea batatas</i> L)	288-292
	Dwi Susmiyanto, Nur Aji Wibowo, Adita Sutresno	
34	STUDI PENGARUH FREKUENSI 6000 – 9600 HZ PADA MUSIK GAMELAN JAWA TERHADAP PERTUMBUHAN SAWI HIJAU JENIS <i>Brassica rapa</i> var. <i>parachinensis</i> L dan <i>Brassica Juncea</i>	293-298
	Tesar Aditya, Made Rai Suci Shanti, Adita Sutresno	
35	KAJIAN EKSPERIMENTAL TENTANG PENGGUNAAN PORT FUEL INJECTION (PFI) PADA MOTOR BENSIN DUA-LANGKAH SILINDER TUNGGAL	299-304
	Teddy Nurcahyadi, Purnomo, Tri Agung Rohmad, Alvin Sahroni	
36	APLIKASI METODA GEOLISTRIK UNTUK IDENTIFIKASI SESAR BAWAH PERMUKAAN DI WILAYAH DAS JENEBERANG SULAWESI SELATAN	305-310
	Muhammad Altin Massinai , Lantu, Virman, Syaeful Akbar	
37	ANALISIS DATA GEOLISTRIK UNTUK IDENTIFIKASI PENYEBARAN AKUIFER DAERAH ABEPURA, JAYAPURA	311-316
	Virman, Paulus G.D. Lasmono, Muhammad Altin Massinai	

38	SOLAR PHYSICS LONG TERM RESEARCH RESULT: THE BUTTERFLY DIAGRAM OF ACTIVE REGIONS Bambang Setiahadhi	317-321
39	BAGAIMANA KNOWLEDGE MANAGEMENT MENDAMPINGI FISIKA MENGUNGKAP EKSISTENSI GAYA FUNDAMENTAL KELIMA ALAM SEMESTA Md Santo	322-331
40	PEMANFAATKAN EKSTRAK ANTOSIANIN KOL MERAH (<i>Brassica oleracea</i> var) SEBAGAI DYE SENSITIZED DALAM PEMBUATAN PROTOTIPE SOLAR CELL(DSSC) Ferri Rusady Saputra, Ferdy Samuel Rondonuwu , Adita Sutresno	332-337
41	OTOMATISASI SISTEM TOMOGRAFI RESISTANSI LISTRIK Ayuk Widyayanti, Suryasatriya Trihandaru, Andreas Setiawan	338-344
42	PEMBUATAN PROTOTIPE DYE SENSITIZED SOLAR CELL(DSSC) DENGAN MEMANFAATKAN EKSTRAK ANTOSIANIN STRAWBERRY Mochamad Choirul Misbachudin, Suryasatriya Trihandaru, Adita Sutresno	345-350
43	PENGARUH GELOMBANG BUNYI PADA RANGE FREKUENSI 6000 Hz-9600 Hz TERHADAP PERTUMBUHAN SAWI PUTIH (<i>Brassica chinensis</i> L.) Eko Yuli Kristianto, Suryasatriya Trihandaru, Adita Sutresno	351-356
44	PENGARUH CAMPURAN MINYAK GORENG MURNI DAN JELANTAH TERHADAP KANDUNGAN ENERGI Priskila Harli Siswantika, Nur Aji Wibowo, Made Rai Suci Shanti N.A, Andreas Setiawan	357-363
45	REKONSTRUKSI TOMOGRAFI PENAMPANG BENDA 2 DIMENSI MELALUI METODE JARINGAN SYARAF TIRUAN TIPE PROPAGASI BALIK Ayuk Widyayanti, Suryasatriya Trihandaru, Andreas Setiawan	364-370
46	ANALISA FOTO POLA DIFRAKSI ELEKTRON UNTUK PENGUKURAN JARAK ANTAR BIDANG KRISTAL KARBON Elisabeth Dian Atmajati, Kintan Limiansih, Ign Edi Santosa	371-376
BIDANG KIMIA		
47	ANALISIS VERTIKAL KONSENTRASI OZON DALAM UPAYA MENINGKATKAN PENGELOLAAN LINGKUNGAN HIDUP DI JAWA TIMUR Dian Yudha Risdianto	377-385
48	PENGARUH JENIS FIKSATIF TERHADAP KETUAAN DAN KETAHANAN LUNTUR KAIN MORI BATIK HASIL PEWARNAAN LIMBAH TEH HIJAU A.Ign. Kristijanto dan Hartati Soetjipto	386-394

49	PEMANFAATAN SERABUT KELAPA TERMODIFIKASI SEBAGAI BAHAN PENGISI BANTAL DAN MATRAS	395-401
	Srihartini, Andre B.W., Natassiah W., Maria S., Giwang P	
50	ANALISA ASAM LEMAK TIDAK JENUH PADA TEPUNG SORGHUM (<i>Sorghum bicolor</i> L.) TERMODIFIKASI DAN APLIKASINYA SEBAGAI PANGAN FUNGSIONAL FLAKES	402-409
	Vellisya Puspaningsih, Sri hartini, Yohanes Martono	
51	OPTIMASI HASIL BIODISEL BERBAHAN BAKU LIMBAH KRIMER DITINJAU DARI NETRALISASI, KONSENTRASI KATALIS DAN METODA ESTERIFIKASI	410-415
	Dennis Fernaldes Suhendar, A. Ign. Kristijanto, Sri Hartini	
52	PEMANFAATAN LIMBAH CAIR INDUSTRI TEMPE SEBAGAI PUPUK CAIR PRODUKTIF (PCP) DITINJAU DARI PENAMBAHAN PUPUK NPK	416-423
	Bary Fratama, Susanti Pudji Hastuti, dan Santoso Sastrodiharjo	
53	REFLEKSI PEMBELAJARAN KIMIA DI PROGRAM STUDI S1 KESEHATAN MASYARAKAT STIKES DHARMA HUSADA BANDUNG (STIKES DHB)	424-434
	Nina Rosliana , Anna Permanasari	
54	KOMPOSISI MINYAK ATSIRI TANAMAN BARU CINA YANG DIPEROLEH MELALUI CARA PENYULINGAN UAP AIR	435-438
	Hartati Soetjipto dan Elizabeth Betty Elok K	
55	ISOLASI DAN KRISTALISASI KURKUMIN DARI TEMULAWAK, TEMUGIRING DAN KUNYIT	439-442
	Dewi K.A.K.H dan Yohanes Martono	
56	AKTIVITAS ANTIOKSIDAN DAN KADAR FENOLIK TOTAL DARI ASAM FENOLAT AMPAS TEH HITAM INDUSTRI	443-450
	Yohanes Martono , Christin A. Ratueda, Jimmy Hindarto	
57	OPTIMASI PEMBUATAN TEPUNG MILLET TERFORTIFIKASI KACANG TANAH SECARA FERMENTASI DITINJAU DARI DOSIS RAGI DAN WAKTU FERMENTASI	451-456
	Stevan Dwi Hartono, Sri Hartini, Yohanes Martono	

BIDANG MATEMATIKA

58	TEOREMA ABEL-DINI DAN DUAL KÖTHE-TOEPLITZ PADA DERET GANDA	457-463
	Sumardiyono, Soeparna D.W. ,Supama	
59	LINEAR GOAL PROGRAMMING UNTUK OPTIMASI PERENCANAAN PRODUKSI	464-471
	Natalia Esther Dwi Astuti, Lilik Linawati, Tundjung Mahatma	

60	ANALISA SAHAM MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER STOKASTIK Kharisma Yusea Kristaksa , Hanna Arini Parhusip , Bambang Susanto	472-479
61	ORTOGONALITAS P DI RUANG NORM-n Mohammad Mahfuzh Shiddiq	480-484
62	FUZZY LINEAR PROGRAMMING DENGAN FUNGSI KEANGGOTAAN KURVA-S UNTUK PENILAIAN KINERJA KARYAWAN Astuti Irma Suryani, Lilik Linawati dan Hanna A. Parhusip	485-491
63	MENDUGA PERUSAHAAN YANG KELUAR DARI INDEKS LQ45 DENGAN MODEL P/E RASIO H.A. Parhusip	492-496
64	PENERAPAN ALGORITMA FUZZY C-MEANS (FCM) PADA PENENTUAN LOKASI PENDIRIAN LOKET PEMBAYARAN AIR PDAM SALATIGA Trevi Meri Andriyani, Lilik Linawati, Adi Setiawan	497-504
65	PENERAPAN METODE BOOTSTRAP PADA UJI KOMPARATIF NON PARAMETRIK LEBIH DARI 2 SAMPEL Studi Kasus: Inflasi di Kota Purwokerto, Surakarta, Semarang, dan Tegal Tahun 2003-2012 Yudi Agustius, Adi Setiawan, Bambang Susanto	505-512
66	UJI VALIDITAS DAN UJI RELIABILITAS MENGGUNAKAN METODE BOOTSTRAP PADA DATA KUISIONER TIPE YES/NO QUESTIONS Jesyca R. T. Muaja, Adi Setiawan, Tundjung Mahatma	513-519

MATRIKS ATASALJABAR MAX-MIN INTERVAL

M. Andy Rudhito

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

email: arudhito@yahoo.co.id

ABSTRAK

Makalah ini membahas aljabar matriks atas aljabar max-min interval (matriks interval) dan suatu cara untuk mempermudah pengoperasian matriks interval melalui interval matriksnya. Aljabar matriks ini merupakan perluasan aljabar matriks atas aljabar max-min dan dapat menjadi dasar pembahasan aljabar matriks max-min bilangan kabur. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua matriks interval yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar max-min dan penjumlahan max-min merupakan semimodul. Himpunan semua matriks persegi atas aljabar max-min interval yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan max-min dan perkalian max-min merupakan semiring idempoten. Sebagai jaminan dapat dilakukan pengoperasian matriks interval melalui interval matriksnya, ditunjukkan bahwa semimodul himpunan semua matriks interval isomorfis dengan semimodul himpunan interval matriks yang bersesuaian, dan semiring himpunan semua matriks interval persegi isomorfis dengan semiring himpunan interval matriks persegi yang bersesuaian.

Kata-kata kunci: aljabar matriks, aljabar max-min, interval, semiring, semimodul.

PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real $\mathbf{R}$ dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum ([2]).

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan *interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti

telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya.

Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas maksimum juga menggunakan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min, seperti matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti yang telah dibahas dalam [1] dan [2]. Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas interval maksimum, dengan pendekatan aljabar max-min, terlebih dahulu matriks atas aljabar max-min perlu digeneralisasi ke dalam matriks atas aljabar max-min interval. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas generalisasi matriks atas aljabar max-min perlu digeneralisasi ke dalam matriks atas aljabar max-min interval.

BAHAN DAN METODE

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis. Terlebih dahulu diperhatikan kembali hasil-hasil dalam aljabar max-min [2] dan aljabar max-min interval [5]. Dengan memperhatikan dan membandingkan

pembahasan matriks atas aljabar max-min [2], matriks atas aljabar max-plus [1], [4] dan matriks atas aljabar max-plus interval [4], akan dikonstruksikan dan dibahas sifat-sifat dan teknis perhitungan matriks atas aljabar max-plus interval. Hasil-hasil pembahasan akan disajikan dalam definisi, teorema dan contoh.

HASIL DAN DISKUSI

Terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dalam semiring dan semimodul [5], [6], aljabar max-min dan aljabar max-min interval, yang selengkapnya dapat dilihat dalam [5].

Suatu *semiring* $(S, *, \bullet)$ adalah suatu himpunan takkosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner $*$ dan $\bullet$, yang memenuhi aksioma berikut

- i) $(S, *)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral 0 , yaitu berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

$$a * b = b * a,$$

$$a * 0 = a, \text{ untuk setiap } a, b, c \in S.$$
- ii) $(S, \bullet)$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1 , yaitu berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c),$$

$$a \bullet 1 = 1 \bullet a = a, \text{ untuk setiap } a, b, c \in S.$$
- iii) Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\bullet$, yaitu berlaku

$$a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0, \text{ untuk setiap } a \in S.$$
- iv) Operasi $*$ distributif terhadap $\bullet$, yaitu berlaku

$$(a * b) \bullet c = (a \bullet c) * (b \bullet c),$$

$$a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)$$
 untuk setiap $a, b, c \in S$.

Semiring $(S, *, \bullet)$ dikatakan *idempoten* jika operasi $*$ bersifat idempoten, yaitu berlaku $a * a = a$ untuk setiap $a \in S$, dan dikatakan *komutatif* jika operasi $\bullet$ bersifat komutatif. Dapat ditunjukkan bahwa jika $(S, *)$ merupakan semigrup komutatif idempoten maka relasi " $\preceq$ " yang

didefinisikan pada S dengan $x \preceq y \Leftrightarrow x * y = y$ merupakan *urutan parsial* pada S . Operasi $*$ dan $\times$ dikatakan *konsisten* terhadap urutan " $\preceq$ " dalam S bila dan hanya bila jika $x \preceq y$, maka $x * z \preceq y * z$ dan $x \times z \preceq y \times z$ untuk setiap $x, y, z \in S$. Dalam semiring idempoten $(S, *, \bullet)$ operasi $*$ dan $\bullet$ konsisten terhadap urutan $\preceq$ dalam S .

Semiring $(S, *, \bullet)$ dengan elemen netral 0 dikatakan *tidak memuat pembagi nol* bila dan

hanya bila, jika $x \bullet y = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$ untuk setiap $x, y \in S$.

Diberikan S dan T adalah semiring. Fungsi $f: S \rightarrow T$ disebut *homomorfisma semiring* jika berlaku $f(a * b) = f(a) * f(b)$ dan $f(a \bullet b) = f(a) \bullet f(b)$ untuk setiap $a, b \in S$. Jika homomorfisma semiring f bersifat bijektif, maka f disebut *isomorfisma semiring* dan dikatakan bahwa semiring S isomorfis dengan semiring T .

Diberikan semiring komutatif $(S, *, \bullet)$ dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1 . *Semimodul* atas S adalah semigrup komutatif $(M, *)$ yang dilengkapi operasi perkalian skalar $\diamond: S \times M \rightarrow M$, yang dituliskan $(\alpha, x) \mapsto \alpha \diamond x$, sedemikian hingga memenuhi aksioma berikut:

- i) $\alpha \diamond (x * y) = \alpha \diamond x * \alpha \diamond y,$
- ii) $(\alpha * \beta) \diamond x = \alpha \diamond x * \beta \diamond x,$
- iii) $\alpha \diamond (\beta \diamond x) = (\alpha \diamond \beta) \diamond x,$
- iv) $1 \diamond x = x,$
- v) $0 \diamond x = 0.$

untuk setiap $\alpha, \beta \in S$ dan untuk setiap $x, y \in M$. Elemen-elemen dalam semimodul disebut *vektor*.

Diberikan semimodul M atas semiring S dengan operasi penjumlahan $+$ dan perkalian skalar $\bullet$. Dapat ditunjukkan bahwa jika $(M, +)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, maka operasi $+$ dan $\bullet$ konsisten terhadap urutan $\preceq_m$ dalam semimodul M , yaitu untuk setiap $x, y, z \in M$ dan untuk setiap $\alpha \in S$, jika $x \preceq_m y$, maka $x + z \preceq_m y + z$ dan $\alpha \bullet x \preceq_m \alpha \bullet y$. Diberikan M dan N adalah semimodul atas semiring komutatif S . Fungsi $f: M \rightarrow N$ disebut *homomorfisma semimodul* jika $f(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet f(x)$ dan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in M$ dan untuk setiap $\alpha \in S$. Jika homomorfisma semimodul f bersifat bijektif, maka f disebut *isomorfisma semimodul* dan dikatakan bahwa semimodul M isomorfis dengan semimodul N .

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real nonnegatif dan $\varepsilon := +\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ didefinisikan operasi

$a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := \min(a, b) \forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$. Dapat ditunjukkan $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $0 = 0$ dan elemen satuan $\varepsilon = +\infty$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_\varepsilon^+$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_\varepsilon^+, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_\varepsilon^+$, dan $A, B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times p}$, $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+p \times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}$. Matriks $A, B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ dikatakan *samajika* $A_{ij} = B_{ij}$ untuk setiap i, j .

Interval dalam $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ berbentuk

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbf{R}_\varepsilon^+ \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \bar{x}\}.$$

Didefinisikan

$$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{R}^+, \varepsilon \preceq_m \underline{x} \preceq_m \bar{x}\} \cup \{\{\varepsilon, \varepsilon\}\}.$$

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$:

$$x \oplus y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] \text{ dan } x \otimes y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$$

untuk setiap $x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut *aljabar max-min interval* dan cukup dituliskan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Selanjutnya operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ seperti dalam definisi berikut.

Definisi 1

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ disebut *matriks interval max-min*.

Definisi 2

Matriks $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ dikatakan *samajika* $A_{ij} = B_{ij}$.

Definisi 3

- i) Diketahui $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $\otimes$ dengan $\alpha \otimes A$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya: $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$, dan operasi $\oplus$ dengan $A \oplus B$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya: $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.
- ii) Diketahui $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times p}$, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p \times n}$. Didefinisikan operasi $\otimes$ dengan $A \otimes B$ adalah matriks yang unsur ke- ij -nya: $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$, dengan

$$(E)_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}.$$

Didefinisikan pula matriks $\varepsilon \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$, dengan: $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j .

Contoh 1

Perhatikan bahwa $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ tertutup terhadap operasi $\oplus$, hal ini akibat dari sifat ketertutupan operasi $\oplus$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$. Selanjutnya dapat ditunjukkan $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}, \oplus)$ merupakan semi-grup idempotent komutatif, sehingga relasi " $\preceq_{\text{Im}}$ " yang didefinisikan pada

$I(\mathbf{R}^+)^{m \times n}$ dengan $A \preceq_{\text{lm}} B \Leftrightarrow A \oplus \bar{B} = B$ merupakan urutan parsial. Perhatikan bahwa $A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_{\text{lm}} B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} \preceq_m B_{ij}$ dan $A_{ij} \preceq_m B_{ij}$ untuk setiap i dan j . Lebih lanjut $I(\mathbf{R}^+)^{m \times n}$ merupakan semimodul atas $I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, sedangkan $I(\mathbf{R}^+)^{n \times n}$, $(\oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah matriks ε dan elemen satuan adalah matriks E . Perhatikan bahwa $(I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ bukan semiring komutatif, hal ini sebagai akibat dari $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ yang bukan merupakan semiring komutatif.

Mengingat $(I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-grup idempoten, maka operasi $\oplus$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\text{lm}}$ dalam $I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$, yaitu jika $A \preceq_{\text{lm}} B$, maka $A \oplus C \preceq_{\text{lm}} B \oplus C$ untuk setiap $A, B, C \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$. Mengingat $(I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten, maka operasi $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\text{lm}}$ dalam $I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$, yaitu jika $A \preceq_{\text{lm}} B$, maka $A \otimes C \preceq_{\text{lm}} B \otimes C$ untuk setiap $A, B, C \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$. Untuk $A, B \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times p}$, dan $C \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p \times n}$, berdasarkan sifat distributif, berlaku: jika $A \preceq_{\text{lm}} B$ maka $A \oplus B = B \Leftrightarrow (A \oplus B) \otimes C = B \otimes C \Leftrightarrow (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) = B \otimes C \Leftrightarrow A \otimes C \preceq_{\text{lm}} B \otimes C$.

Pangkat k dari matriks $A \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$, dalam aljabar max-min interval didefinisikan dengan: $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \dots$.

Untuk mempermudah dalam melakukan operasi matriks interval berikut dibahas konsep mengenai interval matriks dari suatu matriks interval.

Definisi 4

Untuk setiap matriks interval $A \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$, didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ dan $\bar{A} = (\bar{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$, berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriks interval A .

Contoh 2.

Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [1,2] & [0,0] & [6,9] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [0,3] & [2,2] \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definisi 5

Diberikan matriks interval $A \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\bar{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks* dari A , yaitu $[\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \bar{A}\}$ dan $I(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b = \{[\underline{A}, \bar{A}] \mid A \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}\}$.

Contoh 3

Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [1,2] & [0,0] & [6,9] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [0,3] & [2,2] \end{bmatrix}.$$

Interval matriks dari A adalah

$$[\underline{A}, \bar{A}] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix} \right].$$

Definisi 6

Interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}]$ dan $[\underline{B}, \bar{B}] \in I(\mathbf{R}_{\max}^{m \times n})_b$ dikatakan *sama* jika $\underline{A} = \underline{B}$ dan $\bar{A} = \bar{B}$.

Berdasarkan sifat kekonsistenan relasi urutan $\preceq_m$ dalam matriks, didefinisikan operasi operasi interval matriks berikut.

i) Diketahui $\alpha \in I(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, $[\underline{A}, \bar{A}]$,

$[\underline{B}, \bar{B}] \in I(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$. Didefinisikan

$$\alpha \otimes [\underline{A}, \bar{A}] := [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \bar{A}] \text{ dan}$$

$$[\underline{A}, \bar{A}] \oplus [\underline{B}, \bar{B}] := [\underline{A} \oplus \underline{B}, \bar{A} \oplus \bar{B}]$$

ii) Diketahui $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times p})_b$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+p \times n})_b$. Didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \otimes [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Untuk setiap $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ dan $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ berlaku $\underline{A} \preceq_m \overline{A}$, $\underline{B} \preceq_m \overline{B}$ dan $\alpha \preceq_m \overline{\alpha}$. Mengingat operasi $\oplus$ dan operasi perkalian skalar $\otimes$ pada semimodul $\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n}$ atas $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ konsisten terhadap urutan " $\preceq_m$ ", maka berlaku $\underline{A} \oplus \underline{B} \preceq_m \overline{A} \oplus \overline{B}$ dan $\alpha \otimes \underline{A} \preceq_m \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$. Jadi $[\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $[\alpha \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ merupakan interval-interval matriks. Dengan demikian $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ tertutup terhadap operasi $\oplus$ dan perkalian skalar $\otimes$ seperti yang didefinisikan di atas. Selanjutnya sesuai dengan definisi operasi pada interval matriks di atas, dapat ditunjukkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Untuk setiap $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n})_b$ berlaku $\underline{A} \preceq_m \overline{A}$ dan $\underline{B} \preceq_m \overline{B}$. Mengingat operasi perkalian $\otimes$ pada semiring $\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n}$ konsisten terhadap urutan " $\preceq_m$ ", maka $\underline{A} \otimes \underline{B} \preceq_m \overline{A} \otimes \overline{B}$. Jadi $[\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$ merupakan interval matriks. Jadi $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n})_b$ tertutup terhadap operasi perkalian $\otimes$ seperti yang didefinisikan di atas. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+n \times n})_b, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempotendengan elemen netral adalah interval matriks $[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$ dan elemen satuan adalah interval matriks $[E, E]$.

Berikut diberikan Lemma 1 yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema 3.

Lemma 1

Untuk setiap A dan $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$, berlaku

- i) $\underline{\alpha} \otimes \underline{A} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}$ dan $\overline{\alpha} \otimes \overline{A} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$,
- ii) $\underline{A} \oplus \underline{B} = \underline{A} \oplus \underline{B}$ dan $\overline{A} \oplus \overline{B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$.

Bukti:

i) Karena $(\alpha \otimes A)_{ij} = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \otimes [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}_{ij}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}_{ij}]$, maka $\underline{\alpha} \otimes \underline{A}_{ij} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}_{ij}$ dan $\overline{\alpha} \otimes \overline{A}_{ij} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}_{ij}$ untuk setiap i dan j , sehingga $\underline{\alpha} \otimes \underline{A} = \underline{\alpha} \otimes \underline{A}$ dan $\overline{\alpha} \otimes \overline{A} = \overline{\alpha} \otimes \overline{A}$.

ii) Karena $(A \oplus B)_{ij} = \underline{A}_{ij} \oplus \underline{B}_{ij} = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] \oplus [\underline{B}_{ij}, \overline{B}_{ij}] = [\underline{A}_{ij} \oplus \underline{B}_{ij}, \overline{A}_{ij} \oplus \overline{B}_{ij}]$, maka $(\underline{A} \oplus \underline{B})_{ij} = \underline{A}_{ij} \oplus \underline{B}_{ij}$ dan $(\overline{A} \oplus \overline{B})_{ij} = \overline{A}_{ij} \oplus \overline{B}_{ij}$ untuk setiap i dan j , sehingga $\underline{A} \oplus \underline{B} = \underline{A} \oplus \underline{B}$ dan $\overline{A} \oplus \overline{B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$. ■

Berikut diberikan Lemma 2 yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema 4.

Lemma 2

Untuk setiap A dan $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{n \times n}$, berlaku $\underline{A} \otimes \underline{B} = \underline{A} \otimes \underline{B}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{B} = \overline{A} \otimes \overline{B}$.

Bukti: Mengingat $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n \underline{A}_{ik} \otimes \underline{B}_{kj} = \bigoplus_{k=1}^n [\underline{A}_{ik}, \overline{A}_{ik}] \otimes [\underline{B}_{kj}, \overline{B}_{kj}] = [\bigoplus_{k=1}^n \underline{A}_{ik} \otimes \underline{B}_{kj}, \bigoplus_{k=1}^n \overline{A}_{ik} \otimes \overline{B}_{kj}]$, maka $(\underline{A} \otimes \underline{B})_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n \underline{A}_{ik} \otimes \underline{B}_{kj}$ dan $(\overline{A} \otimes \overline{B})_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n \overline{A}_{ik} \otimes \overline{B}_{kj}$ untuk setiap i dan j , sehingga $\underline{A} \otimes \underline{B} = \underline{A} \otimes \underline{B}$ dan $\overline{A} \otimes \overline{B} = \overline{A} \otimes \overline{B}$. ■

Teorema 3

Semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$ atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$ atas $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Bukti: Didefinisikan pemetaan $f : \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n} \rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m \times n})_b$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$ untuk setiap $A \in (\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m \times n}$. Dari definisi pemetaan

tersebut jelas bahwa f merupakan pemetaan bijektif. Ambil sembarang A dan $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times n}_\varepsilon$ dan sembarang $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, maka menurut Lemma 1. diperoleh $f(\alpha \otimes A) = [\underline{\alpha \otimes A}, \overline{\alpha \otimes A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}] = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \otimes [\underline{A}, \overline{A}] = \alpha \otimes f(A)$ dan diperoleh $f(A \oplus B) = [(A \oplus B), \overline{A \oplus B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \oplus [\underline{B}, \overline{B}] = f(A) \oplus f(B)$. ■

Dari Teorema 3 di atas dapat disimpulkan untuk setiap matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times n}_\varepsilon$ selalu dapat ditentukan dengan tunggal interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+m \times n})_b$, dan sebaliknya. Jadi matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times n}_\varepsilon$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+m \times n})_b$. Matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times n}_\varepsilon$ bersesuaian dengan interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+m \times n})_b$, dan dituliskan " $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ ". Dapat disimpulkan $\alpha \otimes A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $A \oplus B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$.

Teorema 4

Semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ isomorfis dengan semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+n \times n})_b, \oplus, \otimes)$.

Bukti: Didefinisikan pemetaan $f : \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+n \times n})_b$ dengan $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$ untuk setiap $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon$. Jelas bahwa pemetaan f merupakan pemetaan bijektif. Ambil sembarang A dan $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon$, maka seperti pada pembuktian pada Teorema 3 di atas diperoleh $f(A \oplus B) = f(A) \oplus f(B)$. Selanjutnya menurut Lemma 2 diperoleh bahwa $f(A \otimes B) = [(A \otimes B), \overline{A \otimes B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \otimes [\underline{B}, \overline{B}] = f(A) \otimes f(B)$. Jadi terbukti f merupakan suatu isomorfisma semiring. Jadi semiring $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon$ isomorfis dengan semiring $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+n \times n})_b$. ■

Dari Teorema 4 di atas dapat disimpulkan untuk $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{n \times n}_\varepsilon$ berlaku $A \otimes B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. Untuk matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times p}_\varepsilon$ dan $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{p \times n}_\varepsilon$ juga berlaku $A \otimes B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times p}_\varepsilon$ dan $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{p \times n}_\varepsilon$ dapat diperbesar ukurannya dengan menambahkan sejumlah unsur ε sedemikian hingga membentuk matriks interval $A^\#$ dan $B^\# \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{k \times k}_\varepsilon$, dengan $k = \max(m, p, n)$. Matriks A dan B berturut-turut merupakan submatriks $A^\#$ dan $B^\#$ yang letaknya di sebelah kiri atas, yaitu

$$A^\# = \begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B^\# = \begin{bmatrix} B & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ sehingga}$$

$$A^\# \otimes B^\# = \begin{bmatrix} A \otimes B & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{k \times k}_\varepsilon,$$

di mana $A \otimes B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{m \times n}_\varepsilon$. Karena semiring $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)^{k \times k}_\varepsilon$ isomorfis dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^{+k \times k})_b$, maka $A^\# \otimes B^\# \approx [\underline{A^\#} \otimes \underline{B^\#}, \overline{A^\#} \otimes \overline{B^\#}]$, yang berakibat bahwa $A \otimes B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^{+m \times n})_b$.

Contoh 4

Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [1, 2] & [0, 0] & [6, 9] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [0, 3] & [2, 2] \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$B = \begin{bmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [1, 4] \\ [2, 6] & [0, 2] \\ [1, 2] & [4, 5] \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ \varepsilon & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \overline{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{A} \otimes \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} \otimes \overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $A \otimes B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}] =$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \right],$$

$$\text{sehingga } A \otimes B = \begin{bmatrix} [1, 2] & [4, 5] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [2, 4] \end{bmatrix}.$$

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa operasi-operasi pada matriks interval dapat dilakukan melalui matriks-matriks batas bawah dan batas bawahnya. Selanjutnya dapat diperoleh interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval hasil pengoperasian. Hasil pembahasan di atas selanjutnya dapat digunakan untuk membahas sistem persamaan linear max-min interval. Di samping itu hasil-hasil di atas juga dapat digeneralisir ke dalam matriks atas aljabar max-min bilangan kabur (*fuzzy*), dengan terlebih dulu menggeneralisir aljabar max-min interval ke dalam aljabar max-min bilangan kabur.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.
- [2] Gondran, M and Minoux, M. 2008. Graph, Dioids and Semirings. New York: Springer.
- [3] Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. 2001. Idempotent Interval Anaysis and Optimization Problems. Reliab. Comput., 7, 353 – 377; arXiv: math.SC/ 010180.
- [4] Rudhito, Andy. 2011. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- [5] Rudhito, Andy. 2013. Aljabar Max-Min Interval. Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA, tanggal 18 Mei 2013, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
- [6] Schutter, B. De., 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Engineering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven

Nama Penanya : Panusunan Tampubolon

Instansi : UNIMED

Pertanyaan :

$$A = \begin{bmatrix} (1,2) & (1,0) & (6,5) \\ (5,5) & (0,3) & (2,2) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Jika tanpa aljabar max – min, apakah hanya untuk menentukan batas atas dan bawah saja ?
2. Apa maksudnya Semiring idempoten ?

Jawaban :

1. Makalah ini membahas jaminan matematis operasi matriks interval melalui interval matriks yang bersesuaian
2. Semiring : seperti ring tapi dengan aksioma yang lebih lemah, seperti grup menjadi semigrup

Idempoten : $a + a = a \quad \forall a \in R^+$