PROGRAM STUDI MATEMATIKA, S1 DAN S2 PENDIDIKAN MATEMATIKA
FST DAN FKIP UNIVERSITAS SANATA DHARMA
DAN KOMUNITAS PEMINAT ALJABAR

Prosiding

SEMINAR NASIONAL
ALJABAR, PENERAPAN, DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

UNIVERSITAS SANATA DHARMA
Seminar Nasional dan Workshop Aljabar
2016
Komunitas Peminat Aljabar
YOGYAKARTA

Auditorium Driyarkara, Kampus 2 Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
16 - 17 September 2016

Prosiding
SEMINAR NASIONAL
ALJABAR, PENERAPAN, DAN PEMBELAJARANNYA

SDUP
SANATA DHARMA UNIVERSITY PRESS
Jl. Affandi (Gejayan) Mrican, Yogyakarta 55281
Phone: (0274)513301, Ext.1513/51513 Email: publisher@usd.ac.id
appti
ISBN 978-602-6369-47-5

UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
website: www.usd.ac.id

PROSIDING SEMINAR NASIONAL
ALJABAR, PENERAPAN DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

Editor

Beni Utomo
Antonius Yudhi Anggoro

Kontributor:

Henry W. M. Patty | Samsul Arifin | Dian Rizki Fauzi | Maxrizal | Lucia Winda Cesari | Benedictus Dwi Yuliyanto | Yulia Indah Puspitasari | Iqbal Maulana | Arif Munandar | Iwan Ernanto | Ahmad Faisol | Indriati Nurul Hidayah | Dewa Putu Wiadnyana Putra | Elvira Kusniyanti | Na'imah Hijriati | Siswanto | Scolastika Lintang Rengganis Radityani | Ila Nurlailla Setyowati | Maria Rettian Anggita Sari | Yulius Wahyu Putranto | A. Tatak Handaya Kurniawan | Yokhanan A. | Paskalia Pradanti | Nurhidayah | Maria Kristin Sondang Sihombing | Ari Dwi Hartanto | Anindiati Praminto Putri | Annisa Nur Azizah | Lilik Andri Susanto | Lusia Devi Astuti | Catharina Mara Apriani | Dominikus Arif Budi Prasetyo | Christina Novy Wijaya | Yoanna Krisnawati | Novi Indriani | Trisona Agustina | Kartika Sari | Natalia Merry Dellani | Meta Dispini | Adventa Eklesiawati | Riandika Ratnasari | Almu Noor Romadoni | Yosep Dwi Kri

Sanata Dharma
University Press

PROSIDING SEMINAR NASIONAL ALJABAR, PENERAPAN DAN PEMBELAJARANNYA

Kontribusi Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya dalam Mencerdaskan Bangsa

Copyright © 2016

Beni Utomo (*et al.*), Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Editor:

Beni Utomo, M.Sc.
Antonius Yudhi Anggoro, M.Si.

Buku Cetak
ISBN: 978-602-6369-47-5
EAN: 9-786026-369475

Kontributor:

Henry W. M. Patty | Samsul Arifin | Dian Rizki Fauzi | Maxrizal | Lucia Winda Cesari | Benedictus Dwi Yuliyanto | Yulia Indah Puspitasari | Iqbal Maulana | Arif Munandar | Iwan Ernanto | Ahmad Faisol | Indriati Nurul Hidayah | Dewa Putu Wiadnyana Putra | Elvira Kusniyanti | Na'imah Hijriati | Siswanto | Scolastika Lintang Rengganis Radityani | Ila Nurlailla Setyowati | Maria Rettian Anggita Sari | Yulius Wahyu Putranto | A. Tatak Handaya Kurniawan | Yokhanan A. | Paskalia Pradanti | Nurhidayah | Maria Kristin Sondang Sihombing | Ari Dwi Hartanto | Anindiati Praminto Putri | Annisa Nur Azizah | Lilik Andri Susanto | Lusia Devi Astuti | Catharina Mara Apriani | Dominikus Arif Budi Prasetyo | Christina Novy Wijaya | Yoanna Krisnawati | Novi Indriani | Trisona Agustina | Kartika Sari | Natalia Merry Dellani | Meta Dispini | Adventa Eklesiawati | Riandika Ratnasari | Almu Noor Romadoni | Yosep Dwi Kri

Reviewer:

Prof. Dr. Frans Susilo, SJ.
Prof. Dr. Sri Wahyuni
Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd.
Dr. Ariyadi Wijaya
Dr. Hongki Julie, M.Si.
Dr. Indah Emilia Wijayanti
Dr. Intan Muchtadi
Sudi Mungkasi, Ph.D.
M.V Any Herawati, M.Si.
Veronika Fitri, S.Pd, M.Sc.

Cover Ilustration & Layout:
Made Setianto, S.Pd

Cetakan Pertama, November 2016
viii; 402 hlm.; 21 x 29,5 cm.

PENERBIT:

SANATA DHARMA UNIVERSITY PRESS
Lantai 1 Gedung Perpustakaan USD
Jl. Affandi (Gejayan) Mrican,
Yogyakarta 55281
Telp. (0274) 513301, 515253;
Ext.1527/1513; Fax (0274) 562383
e-mail: H*publisher@usd.ac.id*

INSTITUSI PENDUKUNG:

UNIVERSITAS SANATA DHARMA
DAN KOMUNITAS PEMINAT ALJABAR
Panitia Seminar Nasional Aljabar, Penerapan Dan Pembelajarannya 2016
Kampus III USD, Paingan, Maguwoharjo, Depok Sleman 55284

Sanata Dharma University Press anggota APPTI
(Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang.

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apa pun, termasuk fotokopi, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Isi buku sepenuhnya menjadi tanggungjawab penulis.

TIM PROSIDING

Reviewer

Prof. Dr. Frans Susilo, SJ

Prof. Dr. Sri Wahyuni

Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd

Dr. Ariyadi Wijaya

Dr. Hongki Julie, M.Si

Dr. Indah Emilia Wijayanti

Dr. Intan Muchtadi

Sudi Mungkasi, Ph.D

M.V Any Herawati, M.Si

Veronika Fitri, S.Pd, M.Sc

Editor

Beni Utomo,M.Sc

Antonius Yudhi Anggoro,M.Si

Layout & Cover

Made Setianto,S.Pd

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa sehingga Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya 2016, yang diselenggarakan Universitas Sanata Dharma dan Komunitas Peminat Aljabar ini dapat diselesaikan sesuai dengan rencana.

Prosiding ini bertujuan mendokumentasikan dan mengkomunikasikan hasil presentasi artikel pada seminar nasional tersebut, yang terdiri dari 41 artikel dari para pemakalah yang berasal dari berbagai perguruan tinggi di seluruh Indonesia. Artikel tersebut telah dipresentasikan di seminar nasional pada tanggal 16 - 17 September 2016 dan telah di*review* serta direvisi sesuai saran-saran dari *reviewer*. Artikel didistribusikan dalam 3 kategori yang meliputi kategori Aljabar yang terdiri dari 15 artikel, Penerapan Aljabar 11 artikel dan Pembelajaran Aljabar 15 artikel.

Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya 2016 kali ini secara khusus kita persembahkan untuk Prof. Dr. Frans. Susilo, SJ., yang pada tanggal 12 Desember 2016 ini genap berusia 70 tahun dan akan memasuki masa purna tugas. Beliau adalah guru besar bidang Matematika Universitas Sanata Dharma, yang telah berperan aktif dalam merintis dan mengembangkan Himpunan Peminat Aljabar (HPA), yang kini menjadi Komunitas Peminat Aljabar (KPA). Kita sebagai kolega dan murid-muridnya mengucapkan terimakasih dan penghargaan yang setingi-tingginya atas peran serta dan jasa-jasa beliau.

Terima kasih disampaikan kepada pemakalah yang telah berpartisipasi pada desiminasi hasil kajian/penelitian yang dimuat pada prosiding ini. Terimakasih juga disampaikan kepada tim *reviewer*, tim prosiding, segenap panitia seminar, segenap pengurus KPA dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan prosiding ini. Semoga prosiding ini bermanfaat.

Yogyakarta, 14 November 2016

Ketua Panitia

Dr. M. Andy Rudhito, S.Pd.

DAFTAR ISI

Halaman

Halaman Judul ……. i

Tim Prosiding ……..……. ii

Kata Pengantar ……... iii

Daftar Isi ……... iv

BIDANG ALJABAR

Sifat-Sifat Semigrup Sebagai Graf Pembagi Nol
Henry W. M. Patty ……..……. 1

Dimensi Valuasi Dari Daerah Ideal Utama
Samsul Arifin, Hanni Garminia, Pudji Astuti ……..……...…… 9

Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Sistem Bipartisi dalam Aljabar Min-Maks-Plus dengan Menggunakan *Power Algorithm*
Dian Rizki Fauzi, Siswanto, Pangadi ……...… 17

Karakterisktik Elemen Satuan Pada Semiring *Pseudo-Ternary* Matriks Atas Bilangan Bulat Negatif
Maxrizal, Baiq Desy Aniska Prayanti ……... 25

Optimasi Waktu Produksi dan Analisis Keperiodikan pada Graf Sistem Produksi Ber-*Loop* dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-plus
Lucia Winda Cesari,Marcellinus Andy Rudhito ……..…….. 35

Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting
Benedictus Dwi Yuliyanto, Dominikus Arif Budi Prasetyo ……..…… 46

Kongruensi Latis Distributif Terkecil pada Semiring dengan *Additive Reduct Semilatis*
Yulia Indah Puspitasari, Yeni Susanti ……..…. 55

Modul M-P-Miskin
Iqbal Maulana, Indah Emilia Wijayanti ……..……. 66

Modul Miskin dalam Kelas σ[M]
Arif Munandar, Indah Emilia Wijayanti ……..…….. 76

Beberapa Sifat Ideal Lie di Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi
Iwan Ernanto, Budi Surodjo ……..…… 87

Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi *Skew T-Noether*
Ahmad Faisol, Budi Surodjo, Sri Wahyuni ……...…… 95

Contoh Grup Perkalian Modulo n dengan Identitas Tidak Harus 1
Indriati Nurul Hidayah,Purwanto ……..…… 101

Dualisasi pada Modul Auto Invarian
Dewa Putu Wiadnyana Putra, Indah Emilia Wijayanti ……...…….. 105

Modul Dedekind Atas Gelanggang Tak Komutatif
Elvira Kusniyant, Hanni Garminia, Pudji Astuti ……..…… 114

Representasi Ring R Pada Modul M Atas Ring R'
Na'imah Hijriati, Sri Wahyuni, Indah Emilia Wijayanti ……..…… 120

BIDANG PENERAPAN ALJABAR

Penentuan Penjadwalan Pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dengan Sistem Persamaan Linear atas Aljabar Maks-Plus
Siswant, Casilda Reva Kartika, Sutrima ……..…… 126

Pemodelan Jaringan dan Analisa Penjadwalan Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus
Scolastika Lintang Rengganis Radityani, Marcellinus Andy Rudhito ……. 134

Penerapan Kriptografi Kurva Eliptik atas Lapangan Berhingga Prima pada Algoritma ElGamal
Ila Nurlailla Setyowati, Nikken Prima Puspita, Harjito ……. 147

Penerapan Aljabar Max-Plus pada Sistem Produksi Sederhana Tas Kulit
Maria Rettian Anggita Sari, Paskalia Pradanti ……...…….. 158

Simulasi Pemodelan Jalur Bus Rute Kenteng-Sleman- Prambanan dengan Menggunakan Model PetriNet dan Aljabar Max-Plus
Yulius Wahyu Putranto, A. Tatak Handaya Kurniawan, Yokhanan A. ...…….. 167

Penggunaan Aljabar Max-Plus dalam Pengaturan Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas
Paskalia Pradanti, Maria Rettian Anggita Sari ……. 178

Penerapan Aljabar Max-Plus dalam Penjadwalan Durasi Waktu Nyala Lampu Lalu-lintas Untuk Mengurangi Kemacetan Jalan di Persimpangan Janti Yogyakarta
Nurhidayah, Farkhatu Sikha ……...…….. 185

Optimasi Waktu Produksi dan Analisis Keperiodikan pada Graf Sistem Produksi Ber-*Loop* dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-plus

Lucia Winda Cesari[1)] dan M.Andy Rudhito[2)]
[1]Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam FKIP Universitas Sanata Dharma
[2]S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
luc.caesar@gmail.com, arudhito@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji persamaan pada sistem produksi ber-*loop* serta analisis keperiodikannya dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar *max-plus*. Penelitian diawali dengan membuat graf sistem produksi modifikasi sesuai dengan banyaknya *loop* yang ada pada graf produksi. Selanjutnya disusun aturan sinkronisasi yang sesuai dengan graf modifikasi serta pemodelan sistem persamaan linear sesuai dengan aturan sinkronisasi yang ada. Langkah berikutnya adalah membahas penjadwalan periodik dari barisan keadaan sistem dan output berdasarkan pada sistem persamaan linear aljabar *max-plus*.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa graf produksi ber-*loop* dapat disajikan dalam suatu graf modifikasi dengan penambahan unit pemrosesan sesuai banyaknya *loop*. Dari perhitungan barisan keadaan sistem dan *output* pada sistem produksi ber-*loop,* barisan *input* paling lambat dapat ditentukan dengan menjadikan nilai maksimum waktu pemrosesan pada unit-unit pemrosesan yang memulai pemrosesan secara langsung tanpa menunggu unit pemrosesan lain sebagai input pertama. Barisan input selanjutnya ditentukan secara periodik dengan periode sebesar λ yang merupakan nilai eigen maksimum matriks A. Hal ini membuat barisan keadaan sistem dan *output* yang terbentuk menjadi periodik.

Kata Kunci : *abstrak, aljabar, sistem persamaan linear aljabar max-plus*, *loop*, *sistem produksi*

1. Pendahuluan

Aljabar *max-plus* merupakan suatu struktur aljabar yang semesta pembicaraannya merupakan gabungan dari himpunan bilangan real dan negatif tak terhingga ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Aljabar *max-plus* dilengkapi dengan operasi maksimum yang dinotasikan dengan $\oplus$, dan operasi penjumlahan dinotasikan dengan $\otimes$. Aljabar *max-plus* dapat digunakan untuk menggambarkan secara *linear* dinamika waktu dari suatu sistem *nonlinear* dalam aljabar konvensional, sehingga pembahasan menjadi lebih mudah.[5] Aplikasi aljabar *max-plus* dapat dijumpai dalam penjadwalan penerbangan pesawat di bandara, penjadwalan keberangkatan kereta api, menentukan jalur tercepat, model sistem antrian, maupun dalam sistem produksi sederhana.

Penelitian yang telah dilakukan sebelumnya yang berupa studi kasus untuk menentukan waktu optimum pada produksi bakpia pathok dilakukan tanpa membuat penjadwalan secara periodik.[1] Selain itu, pada penelitian sebelumnya telah dijelaskan

mengenai pembuatan penjadwalan produksi secara periodik tetapi hanya terbatas pada produksi dengan dua mesin saja.[7] Hal ini mengakibatkan dirasa perlu untuk melakukan
suatu penelitian yang membuat suatu sistem dalam sistem produksi dapat mencapai waktu optimum dan bekerja secara periodik.

Sesuai dengan prinsip optimasi yang bertujuan untuk meningkatkan kinerja mesin produksi sehingga mempunyai kualitas yang baik dan hasil kerja yang tinggi[2], secara khusus dalam penelitian ini, penulis menggunakan sistem persamaan linear dalam aljabar *max-plus* untuk menghitung waktu optimum dalam sistem produksi sederhana. Pada penelitian ini akan dihitung waktu optimum produksi dari suatu graf sistem produksi ber-*loop* dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar *max-plus* waktu invarian, serta dibuat penjadwalan aktivitas produksi secara periodik. Perbedaan dari penelitian-penelitian sebelumnya adalah pada penelitian ini akan terlihat model matematika yang relevan agar suatu sistem dalam sistem produksi dapat bekerja secara periodik sesuai dengan kondisi-kondisi yang diberikan. Sistem yang dapat bekerja secara periodik akan mempermudah dalam kegiatan produksi.

2. Aljabar *Max-Plus*

Aljabar *max-plus* merupakan suatu struktur aljabar yang semesta pembicaraannya merupakan gabungan dari himpunan bilangan real dan negatif tak terhingga $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$. Aljabar *max-plus* dilengkapi dengan operasi maksimum yang dinotasikan dengan $\oplus$, dan operasi penjumlahan dinotasikan dengan $\otimes$. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ dapat dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_\varepsilon$, dengan ε merupakan $\{-\infty\}$. Elemen ε merupakan elemen netral pada operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas pada operasi $\otimes$. Selanjutnya, $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$. [4]

Aljabar *max-plus* $(\mathbb{R}_{\mathbf{max}})$ merupakan semiring komutatif yang sekaligus idempoten sebab untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ berlaku $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{max}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{x}$. Selain itu, aljabar *max-plus* juga merupakan semifield sebab untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\mathbf{max}}$ memiliki invers yaitu $-\boldsymbol{x}$, sehingga berlaku $\boldsymbol{x} \otimes (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.[8]

Definisi 2.1

Diberikan matriks $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{max}}^{\boldsymbol{n \times m}}$. Elemen ke-$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dari $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ adalah :

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}) \tag{1}$$

Dengan $i = 1,2, \ldots \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots \ldots, m$.

Diketahui $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}_{max}^{p \times m}$, elemen ke-$i, j$ dari $A \otimes B$ adalah :

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj} \tag{2}$$

Dengan $i = 1,2, \ldots \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots \ldots, m$

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, Elemen ke-$i, j$ dari A^T adalah :

$$[A^T]_{ij} = a_{ji} \tag{3}$$

Dengan $i = 1,2, \ldots \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots \ldots, m$

Definisi 2.2
Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ disebut nilai eigen *max-plus* matriks A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dengan $v \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sehingga
$A \otimes v = \lambda \otimes v$. Vektor v tersebut disebut vektor eigen *max-plus* matriks A yang bersesuaian dengan λ.

Teorema 2.1
Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Jika $\lambda \in \mathbb{R}$ adalah nilai eigen matriks A di $\mathbb{R}_{max}$, maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $G(A)$.

Bukti :
Misal λ adalah nilai eigen matriks A di $\mathbb{R}_{max}$, maka untuk setiap $i \in \{1,2,\dots,n\}$ berlaku $(A \otimes \boldsymbol{x})_i = (\lambda \otimes \boldsymbol{x})_i$ dengan $\boldsymbol{x} \neq \varepsilon_{n\times 1}$. Akibatnya terdapat suatu indeks i_1, i_2 sehingga $a_{i_1}, a_{i_2} \otimes x_{i_2} = \lambda \otimes x_{i_1}$ dengan $x_{i_1} \neq \varepsilon$. Karena $\lambda \neq \varepsilon$ dan $x_{i_1} \neq \varepsilon$ maka $x_{i_2} \neq \varepsilon$ dan $a_{i_1}, a_{i_2} \neq \varepsilon$. Karena $x_{i_2} \neq \varepsilon$ maka terdapat suatu indeks i_3 sedemikian rupa sehingga $a_{i_2}, a_{i_3} \otimes x_{i_3} = \lambda \otimes x_{i_2}$. Karena $\lambda \neq \varepsilon$ dan $x_{i_2} \neq \varepsilon$ maka $x_{i_3} \neq \varepsilon$ dan $a_{i_2}, a_{i_3} \neq \varepsilon$. Demikian seterusnya dengan cara yang sama seperti di atas, maka diperoleh suatu barisan $\{i_j\}$ sehingga berakibat $a_{i_{j-1}}, a_{i_j} \otimes x_{i_j} = \lambda \otimes x_{i_{j-1}}$ dengan $x_{i_j} \neq \varepsilon$ dan $a_{i_{j-1}}, a_{i_j} \neq \varepsilon$ untuk $j = 1,2,\dots$ Karena banyak titik dalam graf $G(A)$ berhingga, maka terdapat suatu j dan l sehingga $i_j = i_l$. Akibatnya diperoleh suatu sirkuit $\tilde{n}$. Misalkan $\tilde{n}$ adalah $(i_l, i_m), \dots, (i_{l+2}, i_{l+1}), (i_{l+1}, i_l)$ sehingga diperoleh $\left(A_{i_l,i_{l+1}} \otimes x_{i_{l+1}}\right) \otimes \dots \otimes \left(A_{i_l,i_{l+1}} \otimes x_{i_{l+1}}\right) = \left(\lambda \otimes x_{i_l}\right) \otimes \dots \otimes \left(\lambda \otimes x_{i_m}\right)$. Karena operasi $\otimes$ di $\mathbb{R}_{max}$ bersifat komutatif maka diperoleh $\left(A_{i_l,i_{l+1}} \otimes \dots \otimes A_{i_m,i_l}\right) \otimes \dots \otimes \left(x_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes x_{i_m} \otimes x_{i_l}\right) = \lambda^{m-l+1}\left(x_{i_l} \otimes x_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes x_{i_m}\right)$ atau $\left(A_{i_l,i_{l+1}} \otimes \dots \otimes A_{i_m,i_l}\right) = \lambda^{m-l+1}$ atau $\lambda = \frac{A_{i_l,i_{l+1}} \otimes \dots \otimes A_{i_m,i_l}}{m-l+1}$. Hal ini berarti λ merupakan bobot rata-rata sirkuit $\tilde{n}$.[6]

Definisi 2.3
Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Graf bobot dari A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $A = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$.
Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot $G = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dengan :

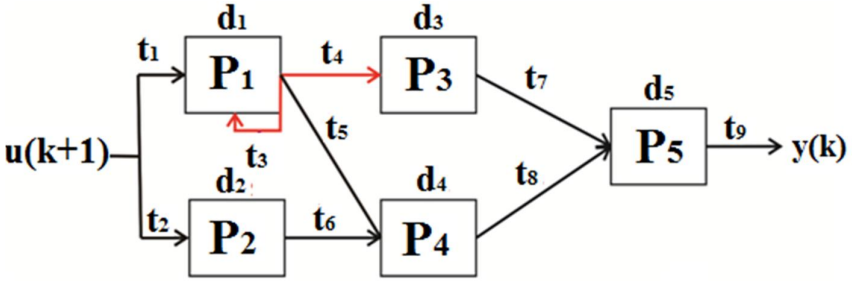
$$A_{ij} = \begin{cases} w(j,i) jika\ (j,i) \in A \\ \varepsilon \quad jika\ (j,i) \notin A \end{cases}$$[3]

3. Pembahasan

Graf sistem produksi ber-*loop* merupakan suatu graf representasi dari sistem produksi yang memuat suatu mesin dengan beberapa pekerjaan identik dalam satu periode produksi. Graf tersebut tersaji dalam beberapa jenis seperti berikut.

3.1 *Loop* Tunggal (*Single Loop*)

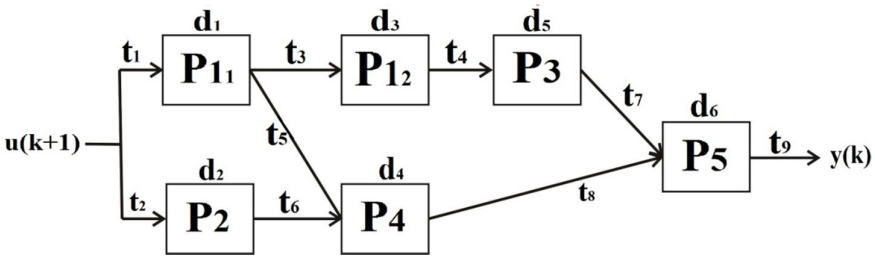
Graf dengan *loop* tunggal menandakan bahwa mesin yang mengandung *loop* tersebut melakukan dua kali pekerjaan (*job*) dalam satu kali periode produksi. Dengan mengandaikan bentuk segiempat sebagai pemrosesan serta anak panah menunjukkan jalur produksi, graf tersebut dapat tersaji sebagai berikut.



Gambar 1. Graf Sistem Produksi *Loop* Tunggal

Pada Gambar 1. di atas, anak panah merah menunjukkan alur produksi untuk pekerjaan (*job*) kedua pada mesin P_1. P_1 melakukan pekerjaan (*job*) pertama dan mendistribusikannya pada P_4. P_1 yang telah menyelesaikan pekerjaan pertamanya kemudian memulai lagi pekerjaan keduanya dan mendistribusikannya ke P_3. Dengan kata lain untuk setiap satu kali produksi hingga *output* tersedia, unit pemrosesan P_1 harus melakukan 2 kali pekerjaan (*job*) sedangkan unit pemrosesan yang lain hanya melakukan 1 kali pekerjaan.

Selanjutnya diberikan suatu graf modifikasi dengan penambahan unit pemrosesan bayangan sebanyak *loop* yang ada seperti berikut ini.



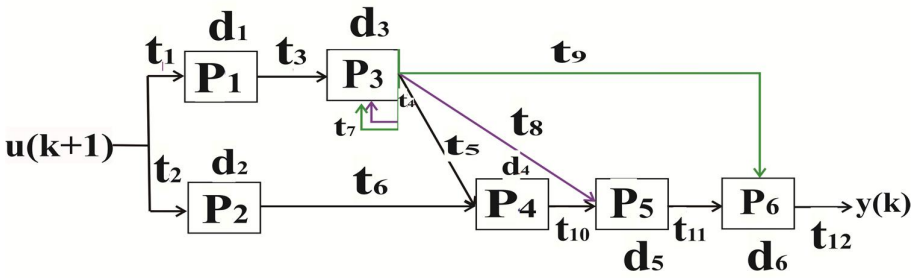
Gambar 2. Graf Sistem Produksi Modifikasi *Loop* Tunggal

Pada Gambar 2. terlihat bahwa unit pemrosesan bayangan yang ditambahkan untuk merepresentasikan pekerjaan kedua pada P_1 adalah P_{1_2}. Pekerjaan pertama yang telah diselesaikan pada P_1 yang direpresentasikan dengan P_{1_1} kemudian dilanjutkan ke unit pemrosesan P_4, sementara itu unit pemrosesan P_{1_2} dapat memulai pekerjaannya segera setelah P_{1_1} menyelesaikan pekerjaannya.

3.2 *Loop* Berganda (*Multi Loop*)

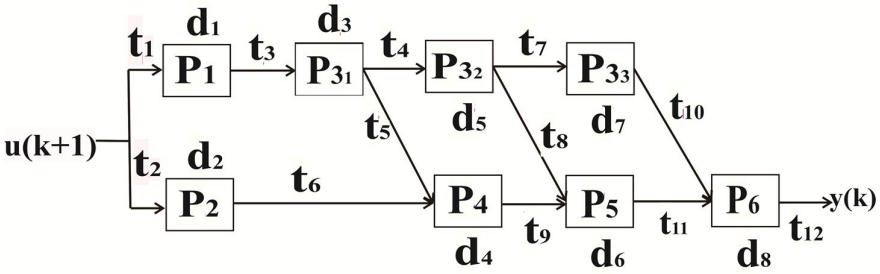
Suatu unit pemrosesan dalam sistem produksi dapat memuat beberapa *loop* (tidak hanya satu). Misal untuk suatu unit pemrosesan P_i untuk setiap satu kali

produksi dapat memuat *n loop*. Hal ini menandakan bahwa unit pemrosesan P_i melakukan pekerjaan sebanyak $n+1$ kali untuk satu produksi hingga *output* tersedia. Berikut ini tersaji graf sistem produksi yang memuat beberapa *loop* pada satu unit pemrosesan.



Gambar 3. Graf Sistem Produksi *Loop* Berganda

Gambar 3. menunjukkan bahwa pada unit pemrosesan P_3 terdapat 2 *loop* yang menandakan bahwa P_3 melakukan pekerjaan sebanyak 3 kali dalam satu kali periode produksi hingga *output* tersedia. Garis ungu menunjukkan alur produksi untuk pekerjaan kedua, sedangkan garis hijau menunjukkan alur produksi untuk pekerjaan ketiga. P_3 melakukan pekerjaan pertama dan mendistribusikannya ke P_4, sementara itu P_3 kembali melakukan pekerjaan keduanya dan mendistribusikannya ke P_5. Pekerjaan ketiga pada P_3 yang telah diselesaikan kemudian didistribusikan ke P_6. Selanjutnya diberikan graf modifikasi yang sesuai yakni :



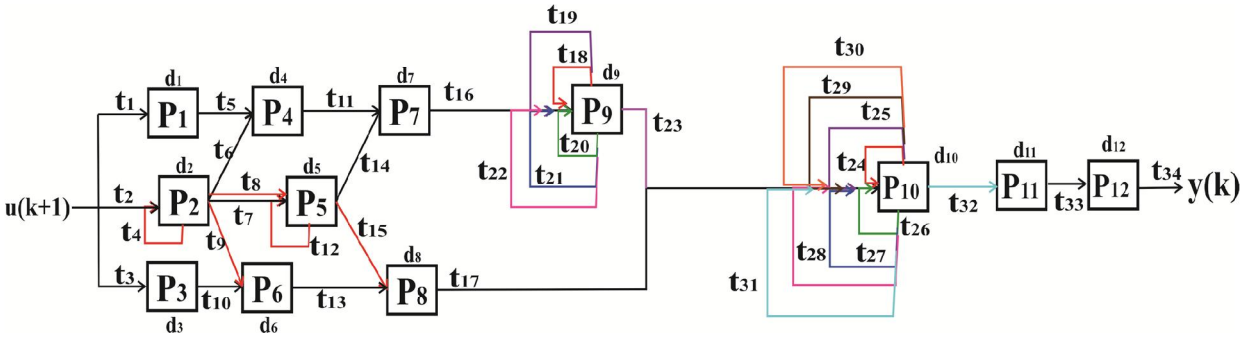
Gambar 4. Graf Sistem Produksi Modifikasi *Loop* Berganda

Gambar 4. menunjukkan bahwa unit pemrosesan bayangan P_{3_2} dan P_{3_3} ditambahkan untuk merepresentasikan pekerjaan kedua dan ketiga pada P_3 untuk satu kali periode produksi.

3.3 *Loop* Berganda dengan Banyak Titik (*Multi Loop Multi Vertex*)

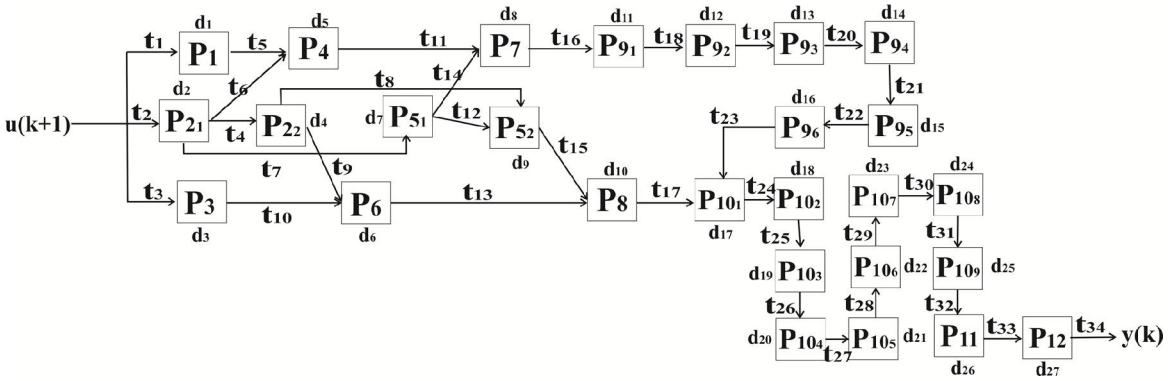
Pada bagian ini akan dibahas mengenai graf sistem produksi yang memiliki beberapa *loop* pada beberapa titik. Titik pada bahasan ini berarti unit pemrosesan yang nantinya pada graf akan direpresentasikan dengan bangun segiempat. Graf yang

terbentuk adalah sebagai berikut.



Gambar 5. Graf Sistem Produksi *Multi Loop Multi Vertex*

Gambar 5. menunjukkan bahwa pada unit pemrosesan P_2 dan P_5 masing-masing memuat 1 *loop*. Hal ini berarti bahwa P_2 dan P_5 masing-masing melakukan 2 pekerjaan untuk setiap satu kali periode produksi. Unit pemrosesan P_9 dan P_{10} yang memuat masing-masing 5 *loop* dan 8 *loop* melakukan 6 kali pekerjaan dan 9 kali pekerjaan untuk setiap satu kali periode produksi. Graf modifikasi yang dapat dibentuk dari Gambar 3.5 adalah sebagai berikut.



Gambar 6. Graf Sistem Produksi Modifikasi *Multi Loop Multi Vertex*

Berdasarkan Gambar 6. unit pemrosesan bayangan (P_{2_2}) ditambahkan untuk merepresentasikan unit pemrosesan yang memuat *loop* pada P_{2_1}. Hal yang sama juga dilakukan untuk semua unit pemrosesan yang mengandung *loop*. Banyaknya unit pemrosesan bayangan yang ditambahkan sesuai dengan banyaknya *loop* yang ada pada unit pemrosesan tersebut.

Berdasarkan proses modifikasi dari ketiga jenis graf tersebut dapat terlihat bahwa banyaknya unit pemrosesan modifikasi setara dengan jumlahan unit pemrosesan ber-*loop* ditambah dengan banyaknya *loop*. Hal ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

Teorema 1

Jika suatu graf ber-*loop* memiliki i unit pemrosesan dan memiliki total *loop* sebanyak n, maka banyaknya unit pemrosesan modifikasi yang terjadi sebanyak $n + i$.

Bukti :
Diberikan suatu graf dengan i unit pemrosesan tak identik dan n $loop$. n $loop$ menandakan terdapat n pemrosesan identik yang terjadi sehingga terdapat n unit pemrosesan. Banyaknya unit pemrosesan yang terjadi $i + n$ atau $n + i$. ■

Setelah melakukan modifikasi graf dengan penambahan unit pemrosesan bayang sebanyak *loop*, selanjutnya akan dilakukan pemodelan sesuai graf modifikasi untuk masing-masing jenis graf. Pemodelan tersebut dilakukan sesuai dengan sistem persamaan linear *max-plus* waktu invarian berikut ini.

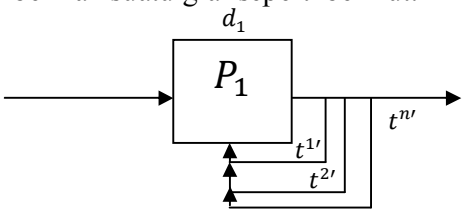
$$\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus B \otimes u(k+1)$$
$$y(k) = C \otimes \boldsymbol{x}(k) \qquad (4)$$

untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0, A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_{max}^{l\times n}$. Vektor $x(k) \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ menyatakan keadaan atau *state,* $u(k) \in \mathbb{R}_{max}^{m}$
adalah vektor *input*, dan $y(k) \in \mathbb{R}_{max}^{l}$ adalah vektor *output* sistem saat waktu ke-k. SLMI seperti dalam definisi diatas secara singkat dituliskan dengan SLMI (A, B, C) dan dituliskan SLMI (A, B, C, x_0) jika kondisi awal diberikan. Persamaan tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut.

i) $u(k+1)$: waktu saat bahan baku dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke $(k+1)$.
ii) $x_i(k)$: waktu saat bahan dilakukan pemrosesan ke-i dan mulai bekerja untuk pemrosesan ke-k dengan waktu pemrosesan sebesar d_i.
iii) $y(k)$: waktu saat produk kue ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem.

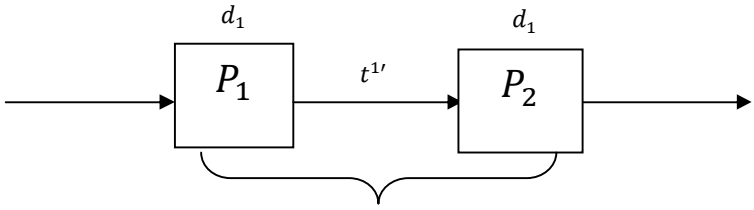
Berdasarkan sistem persamaan linear yang telah dibuat untuk ketiga jenis graf tersebut dapat diperoleh hasil bahwa terdapat perbedaan pada *entry* matriks diagonal utama yang menunjukkan waktu proses unit pemrosesan bayangan. *Entry* yang menunjukkan unit pemrosesan bayangan merupakan hasil penjumlahan dari waktu proses unit pemrosesan asal dan waktu transfernya, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut.

Teorema 2
Jika P_i menunjukkan suatu unit pemrosesan dengan *loop* sebanyak n dan P_n menunjukkan unit pemrosesan bayangan ke-n maka a_{nn} pada matriks A sama dengan $((n+1) \times d_i) + t$, dengan d_i menunjukkan waktu pemrosesan pada unit pemrosesan P_i dan t menunjukkan total waktu transfer dari P_i hingga P_n.
Bukti : Diberikan suatu graf seperti berikut.



Gambar 7. Graf Sistem Produksi dengan *n loop*

Diambil : $t = \otimes_{n=1}^{n} t^{n'}$
Untuk $n = 1$



Gambar 8. Graf Sistem Produksi Modifikasi *n loop* pada *loop* pertama

Karena P_1 dan P_2 bekerja pada mesin yang sama, waktu pemrosesan yang dibutuhkan sampai P_2 selesai harus menunggu P_1 selesai. Waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pekerjaan pada P_2 adalah $d_1 + t^{1'} + d_1 = 2d_1 + t^{1'} = (1+1)d_1 + t^{1'}$

Untuk $n = 2$
Dengan prinsip yang sama, waktu pemrosesan sampai P_3 selesai harus menunggu pemrosesan P_1, P_2 selesai pemrosesan. Sehingga waktu yang diperlukan untuk mesin tersebut hingga menyelesaikan pekerjaan P_3 sama dengan waktu proses untuk menyelesaikan P_2 ditambah dengan waktu transfer ditambah dengan waktu pemrosesan pada P_3 sehingga dapat dituliskan : $(1+1)d_1 + t^{1'} + t^{2'} + d_1 = (1+1+1)d_1 + t^{1'} + t^{2'} = (2+1)d_1 + \bigotimes_{n=1}^{2} t^{n'}$
Dengan menggunakan prinsip yang sama, pada $n = n$
Waktu pemrosesan hingga P_n dapat ditulistkan :$(n-1+1)d_1 + \bigotimes_{n=1}^{n=n-1} t^{n'} + d_1 + t^{n'} = (n-1+1+1)d_1 + \bigotimes_{n=1}^{n=n} t^{n'} = (n+1)d_1 + \bigotimes_{n=1}^{n} t^{n'} = (n+1)d_1 + t$
Karena waktu merosesan $P_n = (n+1)d_1 + t$ menunjukkan lama waktu P_n dapat memulai pekerjaan ke-$(k+1)$ setelah menyelesaikan pekerjaan ke-k dengan $k = 1,2,3,\ldots$ maka menurut Definisi 2.16, lama waktu pemrosesan pada unit pemrosesan P_n jika disajikan ke dalam bentuk matriksnya akan bersesuaian dengan a_{nn}. Hal ini mengakibatkan,
$a_{nn} = (n+1)d_1 + t$ (5) ■

Berdasarkan sistem persamaan linear tersebut dapat dicari barisan keadaan sistem dan output secara rekursif sesuai dengan kondisi awalnya. Selain itu, barisan keadaan ouput dapat dicari dengan menggunakan
$y = K \otimes x_0 \oplus H \otimes u$ (6)

dengan

$$K = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p} \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \ldots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes p-2} \otimes B & \ldots & C \otimes B \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pada barisan *output* yang diperoleh kemudian akan dicari *input* paling lambat yang membuat kualitas barang setengah jadi menjadi lebih terjaga. Pencarian waktu *input* paling lambat dilakukan dengan mencari sub penyelesaian terbesar $(\hat{u})$ pada $y = H \otimes u$, yaitu :

$$-\hat{u}(k) = \underset{l\le i\le p}{max}\left(-y(i) + H_{i,k}\right), \qquad (7)$$

Berdasarkan *input* paling lambat kemudian dicari barisan keadaan sistem secara rekursif seperti sebelumnya. Waktu *input* paling lambat membuat barisan keadaan sistem maupun *output* menjadi periodik. Keperiodikan dari ketiga jenis graf tersebut memiliki beberapa kesamaan antara lain bahwa periode sistem yang dicapai adalah sebesar λ yang merupakan nilai eigen maksimum dari matriks A. Selain itu, waktu input paling lambat untuk periode produksi pertama setara dengan nilai maksimum waktu pemrosesan untuk unit pemrosesan yang memulai pemrosesan secara langsung tanpa menunggu unit pemrosesan lainnya. Hal ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

Teorema 4.1
Jika terdapat suatu persamaan

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus B \otimes u(k+1)$$
$$y(k) = C \otimes \boldsymbol{x}(k),$$

dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, λ merupakan nilai eigen maksimum dari matriks A, dan *input* $x(0)$ bersesuaian dengan matriks B, serta diketahui P_1 hingga P_l merupakan unit pemrosesan yang memulai pemrosesan tanpa bergantung pada pemrosesan lainnya maka barisan *input* paling lambat agar barisan keadaan sistem periodik adalah $[p, p+\lambda, p+2\lambda, \dots, p+(k-1)\lambda]$ dengan $p = \oplus_{l=1}^{l} a_{ll}$.

Bukti :

Misal diberikan nilai $p = \oplus_{l=1}^{l} a_{ll}$, maka $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ll} \le p$. $P_1, P_2, \dots, P_l$ merupakan unit pemrosesan yang bekerja secara langsung tanpa bergantung pada unit pemrosesan lainnya, sehingga waktu pemrosesan untuk tiap-tiap unit pemrosesannya sama dengan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ll}$. λ merupakan nilai eigen maksimum dari matriks A, sehingga λ merupakan waktu terlama yang dimiliki suatu unit pemrosesan dalam sistem produksi untuk menyelesaikan pekerjaannya dalam satu periode.

Selanjutnya akan diambil *input* paling lambat untuk produksi pertama. Karena $P_1, P_2, \dots, P_l$ merupakan unit pemrosesan yang bekerja secara langsung maka unit-unit pemrosesan tersebut bergantung pada waktu *input* yang diberikan. Semakin cepat waktu *input*nya, semakin cepat pula unit pemrosesan tersebut memulai pekerjaannya, begitupun sebaliknya.

Dalam kasus ini akan dicari *input* yang paling lambat yang memenuhi $y(1)$. Jika $u(1) < p$ maka ada $a_{mm} = p$ yang memenuhi $a_{mm} > u(1)$. Jadi, $u(1)$ bukan *input* paling lambat. Jika $u(1) > p$ maka waktu produksi yang diambil menjadi tidak optimum karena semua unit pemrosesan dari P_1 hingga P_l seharusnya telah dapat menyelesaikan proses pertamanya. Hal ini membuat barang akan keluar dari sistem melebihi dari waktu yang diharapkan. Sehingga diambil $u(1) = p$ yang membuat $y(1)$ tetap.

Jika diambil periode $< \lambda$, maka ada unit pemrosesan yang belum menyelesaikan pemrosesan sebelumnya saat unit pemrosesan yang lain telah melakukan pemrosesan periode selanjutnya. Hal ini membuat keadaan tidak periodik untuk semua sistem.

Selanjutnya diambil λ sebagai periode yang merupakan waktu terlama yang dimiliki suatu unit pemrosesan dalam sistem produksi untuk menyelesaikan pekerjaannya dalam satu periode. Pengambilan λ sebagai periode membuat semua unit pemrosesan telah selesai melakukan pemrosesan dan siap melakukan pemrosesan selanjutnya. Begitu pun untuk unit pemrosesan dengan waktu pemrosesan sebesar λ, unit pemrosesan tersebut akan segera melakukan pemrosesan selanjutnya tanpa harus menunggu terlalu lama.

Jika diambil periode $> \lambda$, maka akan terjadi waktu tunggu pada unit pemrosesan dengan waktu proses terpanjang sehingga waktu pemrosesan menjadi tidak optimum.Sehingga, periode yang diambil untuk membuat barisan keadaan sistem menjadi periodik adalah λ. Seperti dijelaskan diatas, bahwa unit pemrosesan yang bekerja secara langsung dapat memulai produksi sesuai dengan barisan *input* yang dimasukkan. Sehingga, agar barisan keadaan sistem optimum dan periodik, barisan *input* yang dipilih adalah $[p, p+\lambda, p+2\lambda, \dots, p+(k-1)\lambda]$ dengan $p = \oplus_{l=1}^{l} a_{ll}$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan-pembahasan sebelumnya dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Sifat-sifat model matematika waktu produksi pada graf sistem produksi ber-*loop* dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar *max-plus* adalah sebagai berikut.
   a. Jika suatu graf ber-*loop* memiliki i unit pemrosesan dan memiliki total *loop* sebanyak n, maka banyaknya unit pemrosesan modifikasi yang terjadi sebanyak $n+i$.
   b. Jika P_i menunjukkan suatu unit pemrosesan dengan *loop* sebanyak n dan P_n menunjukkan unit pemrosesan bayangan ke-n maka a_{nn} pada matriks A sama dengan $((n+1) \times d_i) + t$, dengan d_i menunjukkan waktu pemrosesan pada unit pemrosesan P_i dan t menunjukkan total waktu transfer dari P_i hingga P_n.
2. Jika terdapat suatu persamaan

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus B \otimes u(k+1)$$
$$y(k) = C \otimes \boldsymbol{x}(k),$$

dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, λ merupakan nilai eigen maksimum dari matriks A, dan *input* $x(0)$ bersesuaian dengan matriks B, serta diketahui P_1 hingga P_l merupakan unit pemrosesan yang memulai pemrosesan tanpa bergantung pada pemrosesan lainnya maka barisan *input* paling lambat agar barisan keadaan sistem periodik adalah $[p, p+\lambda, p+2\lambda, \dots, p+(k-1)\lambda]$ dengan $p = \oplus_{l=1}^{l} a_{ll}$.

Daftar Pustaka

[1] Arifin, Mustofa dan Mustofa. 2012. *Aplikasi Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus dalam Mengoptimalisasi Waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" Daerah Istimewa Yogyakarta.* Skripsi diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

[2] Berlianty, Arifin. (2002). *Teknik-Teknik Optimasi Heuristik*. ISBN : 987-979-756-625-8.

[3] De Schutter, B. 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. PhD Thesis. Leuven: Department of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit.

[4] De Schutter, B and T. Van den Boom. 2008. Max-plus algebra and max-plus linear discrete event system : An Introduction, "*Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event System*". Goteborg, Sweden.

[5] Farlow, Kasie G. (2009*). Max-Plus Algebra*. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

[6] Rudhito, Andy. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta : Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP-Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

[7] Subiono and Nur Shofianah. 2009. *Using Max-Plus Algebra in The Flow Shop Scheduling.* The Journal of Technology and Science, Vol. 20, No. 3.

[8] Subiono. 2015. *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya.* Surabaya : Jurusan Matematika, FMIPA-ITS, Surabaya.