

Jurnal Matematika

1693-1394 (PRINT) / 2655-0016 (ONLINE)

[Website](#) [ISSN Portal](#)

About Articles

PUBLISHING WITH THIS JOURNAL

\$

There are **NO PUBLICATION FEES** ([article processing charges or APCs](#)) to publish with this journal.



Look up the journal's:

- [Aims & scope](#)
- [Instructions for authors](#)
- [Editorial Board](#)
- [Peer review](#)



Expect on average **24 weeks** from submission to publication.

BEST PRACTICE



This journal began publishing in **open access** in **2007**.

This journal uses a **CC BY** license.



→ Look up their [open access statement](#) and their [license terms](#).



The author **does not retain** unrestricted copyrights and publishing rights.



Articles digitally archived in:

- A national library: Portal Garuda

→ Find out about their [archiving policy](#).

JOURNAL METADATA



Publisher
Universitas Udayana, Indonesia

Society or institution
Jurusan Matematika FMIPA

Manuscripts accepted in
English, Indonesian



LCC subjects 

Science: Mathematics

Keywords

mathematics

Added 12 January 2016 • Updated 1 March 2020

SEARCH

Journals

Articles

DOCUMENTATION

API

OAI-PMH

Widgets

Public data dump

OpenURL

XML

FAQs

ABOUT

About DOAJ

DOAJ team

Ambassadors

Advisory Board & Council

Editorial Subcommittee

Volunteers

News

SUPPORT

Support DOAJ

Sponsors

Publisher supporters

Supporters

APPLY

Application Form

Guide to applying

The DOAJ Seal

Transparency & best practice

Why index your journal in DOAJ?

Licensing & copyright

STAY UP TO DATE

 Twitter

 Facebook

 Github

 LinkedIn

 WeChat

 Atom feed

DOAJ
OPEN
GLOBAL
TRUSTED



Content on this site is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International \(CC BY-SA 4.0\) license](#).



Copyrights and related rights for **article metadata** waived via [CC0 1.0 Universal \(CC0\) Public Domain Dedication](#).

© DOAJ 2022 default by all rights reserved [unless otherwise specified](#).

Accessability Privacy Contact T&Cs Media

IS4OA Cottage Labs

Photos used throughout the site by David Jorre, Jean-Philippe Delberghe, JJ Ying, Luca Bravo, Brandi Redd, & Christian Perner from Unsplash.

This website uses cookies to ensure you get the best experience. [Learn more about DOAJ's privacy policy.](#)

HIDE THIS MESSAGE

https://doaj.org/toc/2655-0016?source=%7B"query"%3A%7B"bool"%3A%7B"must"%3A%5B%7B"terms"%3A%7B"index.issn.exact"%3A%5B"169... 1/1

JURNAL MATEMATIKA

VOLUME 1

NOMOR 1

TAHUN 2010

CONSTRUCTION OF A h -GENERALIZED STANDARD
BROWNIAN SHEET BY MEANS OF LINDBERBERG'S
CENTRAL LIMIT THEOREM

Wayan Somayasa

PEMODELAN ALJABAR *MAX-PLUS* DAN EVALUASI KINERJA
JARINGAN ANTRIAN *FORK-JOIN* TAKSIKLIK
DENGAN KAPASITAS PENYANGGA TAKHINGGA

M. Andy Rudhito, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto, dan F. Susilo

BEBERAPA SIFAT IDEAL GELANGGANG POLINOM MIRING:
SUATU KAJIAN PUSTAKA

Amir Kamal Amir

UJI KENORMALAN UNIVARIAT: SUATU KAJIAN PUSTAKA

I Wayan Sumarjaya

MODEL PENYERAPAN OBAT UNTUK INTERVAL DAN DOSIS BERBEDA

I Nyoman Widana

IMPLEMENTASI BEBERAPA UJI KENORMALAN OMNIBUS
DENGAN PERANGKAT LUNAK R

I Wayan Sumarjaya

DITERBITKAN OLEH

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS UDAYANA

DENPASAR

Jurnal Matematika

[Home](#)[Announcements](#)[Current](#)[Archives](#)[About ▼](#)
[Home](#) / [Editorial Team](#)

Chief-in Editor:

I Gusti Ayu Made Srinadi, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([Scopus ID](#), [Orcid ID](#), [SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Associate Editor:

Desak Putu Eka Nilakusmawati, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([Scopus ID](#), [Orcid ID](#), [SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Editorial Board:

I Dewa Ketut Harya Putra, Udayana University, Indonesia ([SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

I Nyoman Budiantara, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Department of Statistics, Indonesia ([Scopus ID](#), [SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

I Wayan Mangku, Bogor Institute of Agriculture, Indonesia ([SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Leo H. Wiryanto, Bandung Institute of Technology, Indonesia ([SINTA ID](#))

Marjono, Brawijaya University, Department of Mathematics, Indonesia ([Scopus ID](#), [Orcid ID](#), [SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Ichary Soekirno, Padjajaran University, Indonesia ([SINTA ID](#))

Komang Dharmawan, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([Scopus ID](#), [SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

G.K. Gandhiadi, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

I Komang Gde Sukarsa, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

I Putu Eka Nila Kencana, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Made Susilawati, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([Scopus ID](#), [Orcid ID](#), [SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Ni Luh Putu Suciptawati, Udayana University, Mathematics Department, Indonesia ([SINTA ID](#), [Google Scholar](#))

Jurnal Matematika

[Home](#) [Announcements](#) [Current](#) [Archives](#) [About](#) ▼ [Home](#) / [Archives](#) / Vol 1 No 1 (2010)DOI: <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01>

Published: 2012-11-14

Articles

IMPLEMENTASI BEBERAPA UJI KENORMALAN OMNIBUS DENGAN PERANGKAT LUNAK R

I WAYAN SUMARJAYA

DOI : <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01.p06>

Abstract views: 46, PDF downloads: 301

MODEL PENYERAPAN OBAT UNTUK INTERVAL DAN DOSIS BERBEDA

I NYOMAN WIDANA

DOI : <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01.p07>

Abstract views: 76, PDF downloads: 478

UJI KENORMALAN UNIVARIAT: SUATU KAJIAN PUSTAKA

I WAYAN SUMARJAYA

DOI : <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01.p08>

Abstract views: 65, PDF downloads: 177

BEBERAPA SIFAT IDEAL GELANGGANG POLINOM MIRING: SUATU KAJIAN PUSTAKA

AMIR KAMAL AMIR

DOI : <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01.p09>

Abstract views: 82, PDF downloads: 67

PEMODELAN ALJABAR MAX-PLUS DAN EVALUASI KINERJA JARINGAN ANTRIAN FORK-JOIN TAKSIKLIK DENGAN KAPASITAS PENYANGGA TAKHINGGA

M. ANDY RUDHITO, SRI WAHYUNI, ARI SUPARWANTO, F. SUSILO

DOI : <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01.p10>

Abstract views: 158, PDF downloads: 82

BY MEANS OF LINDBERG'S CENTRAL LIMIT THEOREM

WAYAN SOMAYASA

DOI : <https://doi.org/10.24843/JMAT.2010.v01.i01.p11>

Abstract views: 61, PDF downloads: 104

PEMODELAN ALJABAR *MAX-PLUS* DAN EVALUASI KINERJA JARINGAN ANTRIAN *FORK-JOIN* TAKSIKLIK DENGAN KAPASITAS PENYANGGA TAKHINGGA

¹M. ANDY RUDHITO, ²SRI WAHYUNI, ³ARI SUPARWANTO, DAN ⁴F. SUSILO

¹Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FKIP Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta

^{2,3}Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

⁴Jurusan Matematika, FST Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta

Email : ¹rudhito@staff.usd.ac.id, ²swahyuni@ugm.ac.id, ³ari_suparwanto@yahoo.com, ⁴fsusilo@staff.usd.ac.id

INTISARI

Makalah ini membahas tentang pemodelan dan penentuan waktu penyelesaian siklus (*cycle*) layanan jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga, dengan menggunakan aljabar *max-plus*. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa dinamika jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan matriks atas aljabar *max-plus*. Dapat ditunjukkan pula bahwa waktu siklus layanan jaringan antrian merupakan eigennilai *max-plus* dari matriks pada persamaan tersebut.

Kata kunci: aljabar *max-plus*, eigennilai *max-plus*, jaringan antrian *fork-join*, waktu penyelesaian siklus layanan.

MAX-PLUS ALGEBRA MODELLING AND PERFORMANCE EVALUATION OF QUEUEING NONCYCLIC FORK-JOIN NETWORK WITH INFITE BUFFER CAPACITY

¹M. ANDY RUDHITO, ²SRI WAHYUNI, ³ARI SUPARWANTO, DAN ⁴F. SUSILO

¹PhD Students at Mathematics Department, FMIPA, UGM and Lecturer at FKIP, Sanata Dharma University, Yogyakarta

^{2,3}Mathematics Department, FMIPA, Gadjah Mada University, Yogyakarta

⁴Mathematics Department, FST, Sanata Dharma University, Yogyakarta

Email : ¹rudhito@staff.usd.ac.id, ²swahyuni@ugm.ac.id, ³ari_suparwanto@yahoo.com, ⁴fsusilo@staff.usd.ac.id

ABSTRACT

This paper aims to model and determine the service cycle completion time of noncyclic fork-join queueing networks with infinite buffer capacity, using max-plus algebra. The finding show that the dynamics of the noncyclic fork-join queueing networks with infinite buffer capacity can be modeled into a matrix equation over max-plus algebra. We can also show that the service cycle completion time of queueing networks is a max-plus eigenvalues of the matrix in the equation.

Keywords: max-plus algebra, max-plus eigenvalues, fork-join queueing networks, service cycle completion time.

1. PENDAHULUAN

Jaringan *fork-join* merupakan salah satu sistem antrian yang memungkinkan pelanggan (*customer*) terpecah menjadi beberapa bagian, dan digabung kembali menjadi satu setelah pelanggan melalui sistem tersebut. Sistem seperti ini banyak dijumpai pada proses produksi dalam industri, pengiriman pesan dalam jaringan komunikasi, dan pemrosesan data dalam sistem komputer multiprosesor. Sebagai gambaran dalam jaringan komunikasi, pesan terpecah menjadi paket-paket yang disampaikan melalui jalur

terpisah, kemudian digabungkan kembali di titik tujuan jaringan tersebut hingga diperoleh pesan seperti semula.

Dalam pembahasan jaringan antrian dapat diasumsikan bahwa kapasitas penyangga (*buffer*) takhingga atau berhingga. Pemodelan dinamika jaringan dengan menggunakan aljabar *max-plus* dapat memberikan deskripsi yang lebih kompak dan terpadu (Baccelli *et al.*, 1992). Di samping itu pemodelan ini juga memudahkan dalam hal komputasi numeriknya. Pemodelan jaringan antrian dengan menggunakan aljabar *max-plus* telah mulai

dibahas dalam Krivulin (1994, 1995, 1996a, 1996b). Dalam Krivulin (1994) telah dibahas pemodelan untuk antrian jenis G/G/1. Pemodelan dan evaluasi kinerja, yang meliputi waktu sistem pelanggan dan waktu tunggu pelanggan, untuk sistem antrian *tandem* telah dibahas dalam Krivulin (1995). Dalam literatur tersebut pembahasan secara eksplisit baru dibahas untuk sistem antrian *tandem* dengan kapasitas penyangga takhingga. Dalam Krivulin (1996a) untuk jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga telah diberikan persamaan dinamika keadaan (*state dynamic equation*) secara eksplisit, dan sistem antrian *tandem* dipandang sebagai kejadian khususnya. Persamaan keadaan dinamik secara eksplisit untuk jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga berhingga telah diberikan dalam Krivulin (1996b). Pemodelan yang dilakukan dalam Krivulin (1996a, 1996b), diasumsikan bahwa pada waktu awal jaringan beroperasi, penyangga tidak selalu kosong.

Makalah ini akan membahas pemodelan dan kinerja (*performance*) jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga, dengan kondisi pada awal jaringan beroperasi, penyangga dalam keadaan kosong. Pemodelan dilakukan dengan pendekatan aljabar *max-plus*. Kinerja jaringan yang dibahas adalah analisis waktu penyelesaian siklus layanan jaringan antrian dikaitkan dengan eigennilai aljabar *max-plus*.

2. ALJABAR MAX-PLUS DAN TEORI GRAF

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar *max-plus* dan kaitannya dengan teori graf yang akan digunakan dalam pembahasan untuk bagian-bagian selanjutnya. Materi lebih lengkap dapat dilihat pada Baccelli *et al.* (1992), Krivulin (1996b), dan Rudhito (2003).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$. $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semigelanggang komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$, yaitu bahwa $\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$ berlaku:

- i) $a \oplus b = b \oplus a$, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$,
 $a \oplus \varepsilon = a$.
- ii) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$, $a \otimes e = a + 0$
 $= a = 0 + a = e \otimes a$.
- iii) $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a$.
- iv) $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$, $a \otimes (b \oplus c)$
 $= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.
- v) $a \otimes b = b \otimes a$ dan $a \oplus a = a$.

Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semilapangan (*semifield*), yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semigelanggang (*semigelanggang*) komutatif dengan kondisi untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. $\mathbf{R}_{\max} := (\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan aljabar *max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$. Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurang tidak dituliskan), operasi $\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi $\oplus$. Pangkat k dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dinotasikan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$x^{\otimes 0} := 0$$

dan

$$x^{\otimes k} := x \otimes x^{\otimes k-1},$$

dan didefinisikan pula

$$\varepsilon^{\otimes 0} := 0$$

dan

$$\varepsilon^{\otimes k} := \varepsilon, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots$$

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$. Khususnya untuk matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ didefinisikan

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

dan

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$,

$$(E)_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

dan matriks

$$\mathcal{E} \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}, (\mathcal{E})_{ij} := \varepsilon$$

untuk setiap i dan j . $(\mathbf{R}_{\max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semigelanggang (*semiring*) idempoten dengan elemen netral matriks $\mathcal{E}$ dan elemen satuan matriks E . Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dalam aljabar *max-plus* didefinisikan dengan $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \dots$. Selanjutnya akibat sifat idempoten operasi $\oplus$, untuk setiap $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ berlaku $(E \oplus A)^q = E \oplus A \oplus \dots \oplus A^q$.

Suatu graf berarah $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G} = (V, A)$ dengan V adalah suatu himpunan berhingga takkosong yang anggotanya disebut titik dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota A disebut busur. Suatu lintasan dalam graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k,$

$i_{k+1}) \in A$ untuk suatu $l \in \mathbb{N}$ (= himpunan semua bilangan asli), dan $k = 1, 2, \dots, l-1$. Untuk suatu lintasan ρ , panjang lintasan ρ didefinisikan sebagai banyak busur yang menyusun ρ dan dinotasikan dengan $|\rho|_l$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. *Sirkuit elementer* adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Suatu graf berarah $\mathcal{G} = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $i, j \in V$, $i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j . Suatu graf yang memuat sirkuit disebut *graf siklik*, sedangkan suatu graf yang tidak memuat sirkuit disebut *graf taksiklik*.

Untuk setiap graf berarah $\mathcal{G} = (V, A)$ dengan n titik, didefinisikan suatu matriks $G \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, yang disebut dengan *matriks kedampingan* dari graf berarah $\mathcal{G}$, dengan unsur-unsurnya adalah

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } (j, i) \in A; \\ \varepsilon, & \text{jika } (j, i) \notin A. \end{cases}$$

Diberikan graf berarah $\mathcal{G} = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, p\}$. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in A$ dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij} . Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i) , dinotasikan dengan $w(j, i)$. Dalam penyajiannya dengan gambar untuk graf berarah berbobot, busur diberi label dengan bobotnya. Didefinisikan *graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ adalah graf berarah berbobot $\mathcal{G}(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \{(j, i) \mid w(j, i) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$. Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot $\mathcal{G} = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, dengan

$$A_{ij} = \begin{cases} w(j, i), & \text{jika } (j, i) \in A \\ \varepsilon, & \text{jika } (j, i) \notin A. \end{cases}$$

Jelas bahwa graf berarah berbobot tersebut merupakan graf preseden dari A .

Diberikan graf berarah berbobot $\mathcal{G} = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$. *Bobot suatu lintasan* $\rho = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l$ didefinisikan sebagai jumlahan bobot busur-busur yang menyusun ρ . Bobot lintasan ρ dinotasikan dengan $|\rho|_w$. Untuk matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, bobot suatu lintasan $\rho = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l$ dalam graf preseden $\mathcal{G}(A)$ adalah $|\rho|_w = A_{i_2, i_1} + A_{i_3, i_2} + \dots + A_{i_l, i_{l-1}}$. Bobot rata-rata lintasan ρ , dinotasikan dengan $|\bar{\rho}|$, didefinisikan sebagai $\frac{1}{|\rho|_l} |\rho|_w$.

Berikut diberikan suatu interpretasi dalam teori graf untuk pangkat k matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dalam aljabar *max-plus*. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Jika $k \in \mathbb{N}$, maka unsur ke- st dari matriks $A^{\otimes k}$ adalah $(A^{\otimes k})_{st} = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (A_{s, i_{k-1}} + \dots + A_{i_2, i_1} + A_{i_1, t}) = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (A_{i_1, t} + A_{i_2, i_1} + \dots + A_{s, i_{k-1}})$ untuk setiap s, t . Karena $(A_{i_1, t} + A_{i_2, i_1} + \dots + A_{s, i_{k-1}})$ adalah bobot lintasan dengan panjang k dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya dalam $\mathcal{G}(A)$, maka $(A^{\otimes k})_{st}$ adalah bobot maksimum semua lintasan dalam $\mathcal{G}(A)$ dengan panjang k , dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya. Jika tidak ada lintasan dengan panjang k dari t ke s , maka bobot maksimum didefinisikan sama dengan ε .

Sekarang diperhatikan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer, dengan maksimum diambil atas semua sirkuit elementer dalam graf. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan graf presedennya $\mathcal{G}(A) = (V, E)$. Bobot maksimum dari semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $\mathcal{G}(A)$ dituliskan sebagai $(A^{\otimes k})_{ii}$. Maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $\mathcal{G}(A)$ atas seluruh titik i adalah $\bigoplus_{i=1}^n (A^{\otimes k})_{ii}$

yang dapat dituliskan sebagai $\text{trace}(A^{\otimes k})$ dan rata-ratanya adalah $(1/k) \text{trace}(A^{\otimes k})$. Kemudian diambil maksimum atas sirkuit dengan panjang $k \leq n$, yaitu atas semua sirkuit elementer, diperoleh suatu rumus untuk bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$ (dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$), sebagai berikut: $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n [(1/k) \text{trace}(A^{\otimes k})]$.

Suatu sirkuit dalam graf $\mathcal{G}$ disebut *sirkuit kritis* jika bobot rata-ratanya sama dengan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}$. Suatu graf yang terdiri dari semua sirkuit kritis dari graf $\mathcal{G}$ disebut *graf kritis* dari $\mathcal{G}$ dan dinotasikan dengan $\mathcal{G}^c$.

Berikut diberikan definisi dan teorema yang pembuktiannya dapat dilihat dalam Rudhito (2003).

Teorema 1. (Baccelli, et al., 2001). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot nonpositif, maka

$$\forall p \geq n, A^{\otimes p} \preceq_m E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1}.$$

Bukti : lihat Baccelli *et al.* (2001) atau Rudhito (2003). ■

Berdasarkan Teorema 1 di atas didefinisikan operasi bintang (*) untuk matriks berikut ini.

Definisi 1. (Baccelli, *et.al.*, 2001) Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot nonpositif. Didefinisikan

$$A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \dots$$

dan

$$A^+ := A \otimes A^*.$$

Definisi 2. (Eigennilai dan eigenvektor aljabar *max-plus*). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *eigennilai aljabar max-plus matriks A* jika terdapat suatu vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_{\max}^n$ dengan $\mathbf{v} \neq \mathbf{e}_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut disebut *eigenvektor aljabar max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ* .

Berikut teorema yang memberikan eksistensi eigennilai aljabar *max-plus* untuk setiap $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$.

Teorema 2. (Baccelli, *et al.*, 2001). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, merupakan suatu eigennilai aljabar *max-plus* matriks A .

Bukti:

lihat Baccelli, *et al.*, (2001) atau Rudhito (2003). ■

Dalam Rudhito (2003) dijelaskan bahwa jika titik i menyusun busur dalam sirkuit kritis ρ_0 dalam $\mathcal{G}(A)$, maka kolom ke- i matriks B^* merupakan eigenvektor yang bersesuaian dengan eigennilai $\lambda_{\max}(A)$, dengan $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, dan $B^* = E \oplus B \oplus \dots \oplus B^{\otimes n-1}$.

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan syarat perlu eigennilaialjabar *max-plus* suatu matriks.

Teorema 3. (Baccelli, *et.al.*, 2001) Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Jika skalar $\lambda \in \mathbf{R}$, merupakan eigennilai aljabar *max-plus* matriks A , maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$.

Bukti:

lihat Baccelli, *et al.* (2001) atau Rudhito (2003). ■

Dari Teorema 2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, $\lambda_{\max}(A)$ merupakan eigennilai aljabar *max-plus* maksimum matriks A . Berikut diberikan lema-lema yang akan melandasi pembahasan selanjutnya.

Lema 4. Jika $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ adalah matriks kedampingan graf berarah taksiklik $\mathcal{G}$, maka $A^{\otimes q} = \mathcal{E}$, untuk semua $q > p$, dengan p adalah panjang lintasan terpanjang dari $\mathcal{G}$.

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk matriks kedampingan di atas, unsur ke- st dari matriks $A^{\otimes k}$ adalah

$$(A^{\otimes k})_{st} = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (A_{i_1, t} + A_{i_2, i_1} + \dots + A_{s, i_{k-1}}),$$

untuk setiap s, t . Perhatikan bahwa $(A^{\otimes k})_{st} \neq \mathcal{E}$ jika dan hanya jika ada sedikitnya satu lintasan dengan panjang k , dengan s sebagai titik awal dan t sebagai titik akhirnya. Andaikan graf berarah di atas siklik, maka selalu dapat dibuat lintasan pada suatu sirkuitnya dengan panjang berapa pun. Hal ini berakibat bahwa $A^{\otimes q} \neq \mathcal{E}$, untuk semua $q = 1, 2, \dots$. Jadi jika graf berarah $\mathcal{G}$ di atas taksiklik, maka $A^{\otimes q} = \mathcal{E}$, untuk semua $q > p$, dengan p adalah panjang lintasan terpanjangnya. ■

Lema 5. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_{\max}^n$ dengan unsur-unsurnya positif atau sama dengan $\mathcal{E}$. Jika graf, dengan matriks A merupakan matriks kedampingannya, taksiklik, maka persamaan $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal. Lebih lanjut penyelesaian diberikan oleh $\mathbf{x} = (E \oplus A)^p \otimes \mathbf{b}$, dengan p adalah panjang lintasan terpanjang dalam graf tersebut.

Bukti:

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{x}$ pada persamaan di atas sebanyak q kali ($q > p$) diperoleh

Substitusi ke-1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A \otimes (A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{b} \\ &= A^{\otimes 2} \otimes \mathbf{x} \oplus A \otimes \mathbf{b} \oplus \mathbf{b} \\ &= A^{\otimes 2} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A) \otimes \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Substitusi ke-2 :

$$\mathbf{x} = A^{\otimes 3} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A \oplus A^{\otimes 2}) \otimes \mathbf{b}.$$

Substitusi ke- q :

$$\mathbf{x} = A^{\otimes q+1} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes q}) \otimes \mathbf{b}.$$

Mengingat graf di atas taksiklik maka $A^{\otimes q} = \mathcal{E}$, untuk semua $q > p$, sehingga diperoleh

$$\mathbf{x} = (E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes p}) \otimes \mathbf{b} = (E \oplus A)^p \otimes \mathbf{b}.$$

Dari proses mencari penentuan penyelesaian di atas nampak bahwa penyelesaian tersebut tunggal. ■

3. MODEL JARINGAN ANTRIAN FORK-JOIN TAKSIKLIK

Pengertian tentang jaringan antrian *fork-joint* berikut mengikuti dalam Krivulin (2000). Diperhatikan suatu jaringan dengan n titik pelayan tunggal (*single-server*) dan pelanggan kelas tunggal (*single-class*). Struktur jaringan antrian ini dapat dinyatakan dengan graf berarah taksiklik $G = (N, A)$ dengan busur yang ditentukan oleh rute transisi pelanggan. Untuk setiap titik $i \in N$, didefinisikan himpunan *pendahulu* (*predecessors*) dan *penerus* (*successors*) titik i berturut-turut dengan $P(i) = \{j \mid (j, i) \in A\}$ dan $S(i) = \{j \mid (j, i) \in A\}$.

Untuk setiap titik $i \in N$ terdiri dari sebuah pelayan dan penyangga dengan kapasitas takhingga yang bekerja dengan prinsip *First-In First-Out* (*FIFO*). Pada waktu-awal jaringan bekerja diasumsikan bahwa pelayan bebas pelanggan, penyangga untuk semua titik i dengan $P(i) \neq \emptyset$ dalam keadaan kosong, sedangkan penyangga titik yang tidak mempunyai pendahulu ($P(i) = \emptyset$) mempunyai takhingga banyak pelanggan.

Operasi *fork* pada titik i diawali setiap kali layanan sebuah pelanggan selesai dan diperoleh beberapa pelanggan baru untuk antrian berikutnya. Banyaknya pelanggan baru yang muncul pada titik i sebanyak titik dalam $S(i)$. Pelanggan-pelanggan baru ini secara serentak meninggalkan titik i dan menuju titik-titik $j \in S(i)$ secara terpisah. Operasi *join* pada titik i terjadi saat pelanggan-pelanggan datang ke titik i , tidak hanya di menunggu di penyangga, tetapi juga menunggu sedikitnya satu pelanggan dari setiap titik $j \in P(i)$ datang. Segera setelah pelanggan datang, bersama satu pelanggan dari setiap titik pendahulunya, mereka bersatu menjadi satu pelanggan dan masuk dalam penyangga dalam pelayan berikutnya. Dalam pengoperasian jaringan ini diasumsikan bahwa perpindahan pelanggan antar titik tidak memerlukan waktu.

Misalkan $a_i(k)$ menyatakan waktu kedatangan pelanggan ke- k pada titik i , $d_i(k)$ menyatakan waktu keberangkatan pelanggan ke- k pada titik i , dan t_{ik} menyatakan lama waktu layanan untuk pelanggan ke- k pada pelayan i . Diasumsikan jaringan mulai beroperasi pada nol waktu, yaitu bahwa $d_i(0) = 0$ dan $d_i(k) = \varepsilon$ untuk semua $k < 0$, $i = 1, \dots, n$. Dinamika antrian pada titik i dapat dinyatakan dengan

$$d_i(k) = \max(t_{ik} + a_i(k), t_{ik} + d_i(k-1)), \quad (1)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} \max_{j \in P(i)}(d_j(k)), & \text{jika } P(i) \neq \emptyset, \\ \varepsilon, & \text{jika } P(i) = \emptyset. \end{cases} \quad (2)$$

Dengan notasi aljabar *max-plus* persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_i(k) = t_{ik} \otimes a_i(k) \oplus t_{ik} \otimes d_i(k-1) \quad (3)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} \bigoplus_{j \in P(i)} d_j(k), & \text{jika } P(i) \neq \emptyset, \\ \varepsilon, & \text{jika } P(i) = \emptyset. \end{cases} \quad (4)$$

Misalkan $\mathbf{d}(k) = [d_1(k), d_2(k), \dots, d_n(k)]^T$, $\mathbf{a}(k) = [a_1(k), a_2(k), \dots, a_n(k)]^T$ dan

$$T_k = \begin{bmatrix} t_{1k} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & t_{nk} \end{bmatrix}.$$

Persamaan (3) dan (4) di atas dapat dituliskan menjadi

$$\mathbf{d}(k) = T_k \otimes \mathbf{a}(k) \oplus T_k \otimes \mathbf{d}(k-1). \quad (5)$$

$$\mathbf{a}(k) = G \otimes \mathbf{d}(k), \quad (6)$$

dengan matriks G yang unsur-unsur adalah

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \in P(i); \\ \varepsilon, & \text{untuk yang lain.} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa G merupakan matriks kedampingan dari graf struktur jaringan antrian. Dari persamaan (5) dan (6) dapat dituliskan persamaan

$$\mathbf{d}(k) = T_k \otimes G \otimes \mathbf{d}(k) \oplus T_k \otimes \mathbf{d}(k-1). \quad (7)$$

Teorema 6. Diberikan jaringan antrian *fork-join* tak siklik dengan graf struktur jaringannya yang mempunyai panjang lintasan terpanjang p dan matriks kedampingan G . Persamaan keadaan eksplisit jaringan tersebut adalah

$$\mathbf{d}(k) = A(k) \otimes \mathbf{d}(k-1), \quad (8)$$

dengan $A(k) = (E \oplus (T_k \otimes G))^p \otimes T_k$.

Bukti:

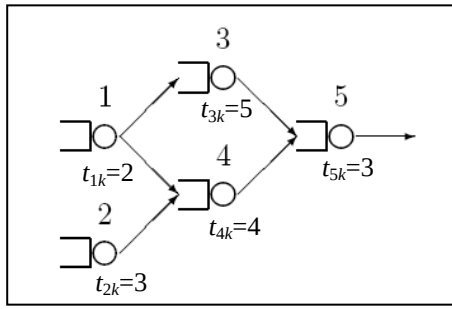
Dari hasil pada persamaan (7) dapat dituliskan $\mathbf{d}(k) = (T_k \otimes G) \otimes \mathbf{d}(k) \oplus (T_k \otimes \mathbf{d}(k-1))$. Karena G adalah matriks kedampingan graf taksiklik dengan panjang lintasan p , maka menurut Lema 4, $G^{\otimes q} = \varepsilon$ untuk semua $q > p$. Akibatnya $(T_k \otimes G)^q = \varepsilon$ untuk semua $q > p$. Selanjutnya menurut Lema 5, persamaan ini mempunyai penyelesaian

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k) &= (E \oplus (T_k \otimes G))^p \otimes (T_k \otimes \mathbf{d}(k-1)) \\ &= ((E \oplus (T_k \otimes G))^p \otimes T_k) \otimes \mathbf{d}(k-1). \end{aligned}$$

■

Contoh 1.

Jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan $n = 5$ diperlihatkan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1.

Matriks kedampungan dari graf pada jaringan di atas adalah

$$G = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Nampak bahwa panjang lintasan terpanjangnya adalah $p = 2$. Dari persamaan (8) diperoleh persamaan keadaan

$$d(k) = A(k) \otimes d(k-1),$$

dengan

$$\begin{aligned} A(k) &= (E \oplus (T_k \otimes G))^2 \otimes T_k \\ &= (E \oplus (T_k \otimes G) \oplus (T_k \otimes G)^2) \otimes T_k \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} t_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1k} \otimes t_{3k} & \varepsilon & t_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1k} \otimes t_{4k} & t_{2k} \otimes t_{4k} & \varepsilon & t_{4k} & \varepsilon \\ t_{1k} \otimes (t_{3k} \oplus t_{4k}) \otimes t_{5k} & t_{2k} \otimes t_{4k} \otimes t_{5k} & t_{3k} \otimes t_{5k} & t_{4k} \otimes t_{5k} & t_{5k} \end{bmatrix}.$$

Misalkan lama waktu layanan untuk pelanggan ke- k pada pelayan i adalah sebagai berikut: $t_{1k} = 2$, $t_{2k} = 3$, $t_{3k} = 5$, $t_{4k} = 4$ dan $t_{5k} = 3$, maka diperoleh

$$A(k) = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 10 & 10 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sehingga untuk $k = 1, 2$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} d_1(1) \\ d_2(1) \\ d_3(1) \\ d_4(1) \\ d_5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 10 & 10 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_1(2) \\ d_2(2) \\ d_3(2) \\ d_4(2) \\ d_5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 10 & 10 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan program Matlab, diperoleh perhitungan hingga $k = 30$, seperti dalam Tabel 1 berikut.

4. EVALUASI KINERJA JARINGAN ANTRIAN

Diperhatikan waktu penuntasan siklus layanan jaringan sebagai barisan siklus layanan: siklus pertama mulai saat waktu awal, dan berakhir segera setelah semua pelayan dalam jaringan menuntaskan layanan pertamanya, siklus kedua berakhir segera setelah semua pelayan dalam jaringan menuntaskan layanan keduanya, dan seterusnya. Dengan demikian waktu penuntasan siklus ke- k pada titik i adalah $d_i(k)$, sehingga waktu penuntasan siklus ke- k pada jaringan dapat dinyatakan sebagai

$$\max_i d_i(k)$$

dengan $d_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$ dan $k = 0, 1, 2, \dots$.

Selanjutnya waktu siklus layanan jaringan dapat dinyatakan dengan:

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_i (d_i(k)).$$

Contoh 2:

Dari hasil dalam Contoh 1 pada Tabel 1 nampak bahwa waktu penuntasan siklus ke- k dari jaringan tersebut adalah $d_5(k)$. Perhitungan secara numerik mengenai γ dari Contoh 1, diperoleh hasil seperti dalam Tabel 2 berikut.

Nampak dalam contoh ini bahwa nilai

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_i (d_i(k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (d_5(k)) = 5. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan program Matlab dapat ditentukan bahwa eigennilai aljabar *max-plus* maksimum matriks A adalah $\lambda_{\max}(A) = 5$ dan eigenvektor yang bersesuaian adalah $[\varepsilon \ \varepsilon \ 0 \ \varepsilon \ 3]^T$.

Secara umum sifat yang muncul pada contoh-contoh di atas diberikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 7. Jaringan antrian fork-join taksiklik kapasitas penyangga takhingga, dengan persamaan keadaan eksplisit jaringan tersebut adalah $d(k) =$

$A(k) \otimes d(k-1)$, $k = 1, 2, \dots$, mempunyai waktu penuntasan siklus layanan

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_i (d_i(k)) = \lambda_{\max}(A(k)),$$

yaitu eigennilai max-plus maksimum matriks $A(k)$ tersebut.

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k) &= A(k) \otimes \mathbf{d}(k-1) \\ &= \dots \\ &= (A(k) \otimes A(k-1) \otimes \dots \otimes A(2) \otimes A(1)) \otimes \mathbf{d}(0). \end{aligned}$$

Karena dalam tulisan ini diasumsikan bahwa

$$A(1) = A(2) = \dots = A(k)$$

dan $\mathbf{d}(0) = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{d}(k) = A^{\otimes k} \otimes \mathbf{0}$, sehingga

$$d_i(k) = \max_j [(A^{\otimes k})_{ij}]$$

dan

$$\max_i d_i(k) = \max_i \{ \max_j [(A^{\otimes k})_{ij}] \}.$$

Bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam graf preseden matriks A tersebut

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n ((1/k) \text{ trace}(A^{\otimes k})) ,$$

yang merupakan eigennilai aljabar *max-plus* maksimum matriks A . Oleh karena itu berlaku

$$A^{\otimes k} \otimes \mathbf{v}^* = (\lambda_{\max}(A))^{\otimes k} \otimes \mathbf{v}^*,$$

untuk suatu eigenvektor $\mathbf{v}^*$. Hal ini berakibat

$$\max_i ((A^{\otimes k})_{ij} \otimes v_j^*) = (\lambda_{\max}(A))^{\otimes k} \otimes \max_i (v_j^*) ,$$

dengan $\max_i (v_j^*) \neq \varepsilon$. Vektor $-\max_i (v_j^*) \otimes \mathbf{v}^*$ juga

merupakan eigenvektor yang berkaitan dengan eigenvektor $\lambda_{\max}(A)$ di atas, dengan

$$-\max_j (v_j^*) \otimes \max_j (v_j^*) = 0.$$

Selanjutnya diperoleh bahwa

$$d_i(k) = \max_j [(A^{\otimes k})_{ij}] = \max_j (\lambda_{\max}(A))^{\otimes k}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \max_i d_i(k) &= \max_i \left(\max_j \left((\lambda_{\max}(A))^{k_j} \right) \right) \\ &= (\lambda_{\max}(A))^{\otimes k}. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_i (d_i(k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\lambda_{\max}(A))^{\otimes k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (k \lambda_{\max}(A)) = \lambda_{\max}(A).\end{aligned}$$

Tabel 1. Hasil Perhitungan $d(k)$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
d_2	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
d_3	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77
d_4	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63
d_5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d_1	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
d_2	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
d_3	82	87	92	97	102	107	112	117	122	127	132	142	147	152	157
d_4	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123
d_5	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155

Tabel 2. Hasil Perhitungan γ

[illegible]

DAFTAR PUSTAKA

- Bacelli, F., *et al.* 1992. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.
- Krivulin, N.K., 1994. Using Max-Algebra Linear Models in the Representation of Queueing Systems. *Proc. 5th SIAM Conf. on Applied Linear Algebra, Snowbird, AT.* June 15-18, 1994. 155—160.
- Krivulin, N.K., 1995. A Max-Algebra Approach to Modeling and Simulation of Tandem Queueing Systems. *Mathematical and Computer Modelling.* **22**(3):25—31.
- Krivulin, N.K., 1996a. The Max-Plus Algebra Approach in Modelling of Queueing Networks *Proc. 1996 SCS Summer Computer Simulation Conference (SCSC-96).* July 21-25. The Society for Computer Simulation, 485—490.
- Krivulin, N.K., 1996b. Max-Plus Algebra Models of Queueing Networks. *Proc. Intern. Workshop WODES'96 Univ. of Edinburgh, UK. Aug. 19-21, 1996.* IEEE: London. 76—81.
- Krivulin, N.K., 2000. Algebraic Modelling and Performance Evaluation, of Acyclic Fork-Join Queueing Networks. *Advances in Stochastic Simulation Methods.* Birkhauser. Boston. 63—81 .
- Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant.* Tesis Magister Matematika Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.