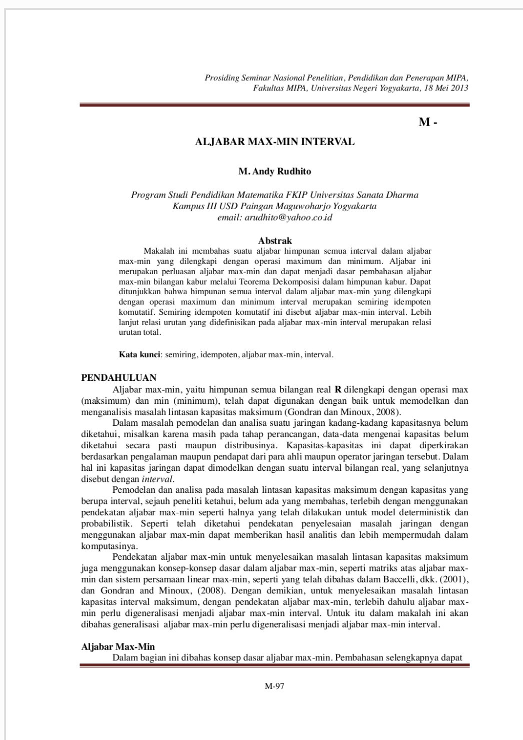
Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author:	M Andy Rudhito
Assignment title:	Periksa similarity
Submission title:	ALJABAR MAX-MIN INTERVAL
File name:	ALJABAR_MAX-MIN_INTERVAL.pdf
File size:	431.03K
Page count:	6
Word count:	2,256
Character count:	11,677
Submission date:	08-Apr-2022 09:36AM (UTC+0700)
Submission ID:	1804859330



Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 18 Mei 2013

M -

ALJABAR MAX-MIN INTERVAL

M. Andy Rudhito

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
email: arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Makalah ini membahas suatu aljabar himpunan semua interval dalam aljabar max-min yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum. Aljabar ini merupakan perluasan aljabar max-min dan dapat menjadi dasar pembahasan aljabar max-min bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi dalam himpunan kabur. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua interval dalam aljabar max-min yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum interval merupakan semiring idempoten komutatif. Semiring idempoten komutatif ini disebut aljabar max-min interval. Lebih lanjut relasi urutan yang didefinisikan pada aljabar max-min interval merupakan relasi urutan total.

Kata kunci: semiring, idempoten, aljabar max-min, interval.

PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum (Gondran dan Minoux, 2008).

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan *interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya.

Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas maksimum juga menggunakan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min, seperti matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti yang telah dibahas dalam Baccelli, dkk. (2001), dan Gondran and Minoux, (2008). Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas interval maksimum, dengan pendekatan aljabar max-min, terlebih dahulu aljabar max-min perlu digeneralisasi menjadi aljabar max-min interval. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas generalisasi aljabar max-min perlu digeneralisasi menjadi aljabar max-min interval.

Aljabar Max-Min

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-min. Pembahasan selengkapnya dapat

ALJABAR MAX-MIN INTERVAL

by Andy Rudhito M

M -

ALJABAR MAX-MIN INTERVAL

M. Andy Rudhito

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
email: arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Makalah ini membahas suatu aljabar himpunan semua interval dalam aljabar max-min yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum. Aljabar ini merupakan perluasan aljabar max-min dan dapat menjadi dasar pembahasan aljabar max-min bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi dalam himpunan kabur. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua interval dalam aljabar max-min yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum interval merupakan semiring idempoten komutatif. Semiring idempoten komutatif ini disebut aljabar max-min interval. Lebih lanjut relasi urutan yang didefinisikan pada aljabar max-min interval merupakan relasi urutan total.

Kata kunci: semiring, idempoten, aljabar max-min, interval.

PENDAHULUAN

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum (Gondran dan Minoux, 2008).

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan kadang-kadang kapasitasnya belum diketahui, misalkan karena masih pada tahap perancangan, data-data mengenai kapasitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Kapasitas-kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Dalam hal ini kapasitas jaringan dapat dimodelkan dengan suatu interval bilangan real, yang selanjutnya disebut dengan *interval*.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas yang berupa interval, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang membahas, terlebih dengan menggunakan pendekatan aljabar max-min seperti halnya yang telah dilakukan untuk model deterministik dan probabilistik. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil analitis dan lebih mempermudah dalam komputasinya.

Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas maksimum juga menggunakan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min, seperti matriks atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti yang telah dibahas dalam Baccelli, dkk. (2001), dan Gondran and Minoux, (2008). Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah lintasan kapasitas interval maksimum, dengan pendekatan aljabar max-min, terlebih dahulu aljabar max-min perlu digeneralisasi menjadi aljabar max-min interval. Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas generalisasi aljabar max-min perlu digeneralisasi menjadi aljabar max-min interval.

Aljabar Max-Min

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-min. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Baccelli et.al (1992), Schutter (1996), dan Gondran and Minoux, (2008).

Suatu *semiring* $(S,*,\bullet)$ adalah suatu himpunan takkosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner $*$ dan $\bullet$, yang memenuhi aksioma berikut

i) $(S,*)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral *0*, yaitu berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c)\ ,\ a * b = b * a\ ,\ a * 0 = a$$

untuk setiap $a, b, c \in S$.

ii) $(S,\bullet)$ adalah semigrup dengan elemen satuan *1*, yaitu berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c),\ \ a \bullet 1 = 1 \bullet a = a\ ,$$

untuk setiap $a, b, c \in S$.

iii) Elemen netral *0* merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\bullet$, yaitu berlaku

$$a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0$$

untuk setiap $a \in S$.

iv) Operasi $*$ distributif terhadap $\bullet$, yaitu berlaku

$$(a * b) \bullet c = (a \bullet c) * (b \bullet c),\ a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)$$

untuk setiap $a, b, c \in S$.

Semiring $(S,*,\bullet)$ dikatakan *idempoten* jika operasi $*$ bersifat idempoten, yaitu berlaku $a * a = a$ untuk setiap $a \in S$, dan dikatakan *komutatif* jika operasi $\bullet$ bersifat komutatif. Suatu semiring komutatif $(S,*,\bullet)$ disebut *semifield* jika setiap elemen taknetralnya mempunyai invers terhadap operasi $\bullet$. Dapat ditunjukkan bahwa jika $(S,*)$ merupakan semigrup komutatif idempoten maka relasi "$\preceq$" yang didefinisikan pada S dengan $x \preceq y \Leftrightarrow x * y = y$ merupakan *urutan parsial* pada S. Operasi $*$ dan $\times$ dikatakan *konsisten* terhadap urutan "$\preceq$" dalam S bila dan hanya bila jika $x \preceq y$, maka $x * z \preceq y * z$ dan $x \times z \preceq y \times z$ untuk setiap $x, y, z \in S$. Dalam semiring idempoten $(S,*,\bullet)$ operasi $*$ dan $\bullet$ konsisten terhadap urutan $\preceq$ dalam S. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

i) Jika $a \preceq b$, maka $a * b = b \Leftrightarrow (a * b) * c = b * c \Leftrightarrow (a * b) * c * c = b * c \Leftrightarrow (a * c) * (b * c) = b * c \Leftrightarrow a * c \preceq b * c$.

ii) Jika $a \preceq b$, maka $a * b = b \Leftrightarrow (a * b) \bullet c = b \bullet c \Leftrightarrow (a \bullet c) * (b \bullet c) = b \bullet c \Leftrightarrow a \bullet c \preceq b \bullet c$.

Semiring $(S,*,\bullet)$ dengan elemen netral *0* dikatakan *tidak memuat pembagi nol* bila dan hanya bila, jika $x \bullet y = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$ untuk setiap $x, y \in S$.

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real nonnegatip dan $\varepsilon := +\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon^+\ ,\ a \oplus b := \max(a, b)\ \text{ dan }\ a \otimes b := \min(a, b)\ .$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $0 = 0$ dan elemen satuan $\varepsilon = +\infty$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_\varepsilon^+$.

Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurang tidak dituliskan), *operasi $\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi $\oplus$*. Karena $(\mathbf{R}_\varepsilon^+, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi "$\preceq_m$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ dengan $x \preceq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_\varepsilon^+$. Karena $\mathbf{R}_\varepsilon^+$ merupakan semiring idempoten, maka operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\preceq_m$

, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$, jika $a \preceq_{m} b$, maka $a \oplus c \preceq_{m} b \oplus c$, dan $a \otimes c \preceq_{m} b \otimes c$. Aljabar max-min $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall\, x,\ y \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ berlaku: jika $x \otimes y = \min(x, y) = 0$, maka $x = 0$ atau $y = 0$.

Aljabar Max-Min Interval

Berikut dibahas aljabar max-min interval yang merupakan perluasan aljabar max-min dan akan digunakan sebagai dasar pembahasan aljabar max-min bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi. Ide pembahasan didasarkan pada analisis idempoten interval dalam Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. (2001)

Definisi 1

Misalkan S adalah himpunan terurut parsial dengan relasi $\preceq$. Suatu *interval* (tertutup) dalam S adalah himpunan bagian S yang berbentuk $\mathrm{x} = [\,\underline{x}\,,\ \overline{x}\,] = \{\, x \in S \mid \underline{x} \preceq x \preceq \overline{x}\,\}$, dengan $\underline{x}\,,\ \overline{x} \in S$ berturut-turut disebut *batas bawah* dan *batas atas* interval $[\,\underline{x}\,,\ \overline{x}\,]$.

Misalkan x dan y adalah interval dalam S. Perhatikan bahwa interval $\mathrm{x} \subseteq \mathrm{y}$ jika dan hanya jika $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \overline{x} \preceq \overline{y}$. Secara khusus $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ jika dan hanya jika $\underline{x} = \underline{y}$ dan $\overline{x} = \overline{y}$. Sebuah interval dengan x dengan $\underline{x} = \overline{x}$ merepresentasi suatu elemen dalam S.

Contoh 1

Telah diketahui bahwa $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ merupakan himpunan terurut parsial dengan relasi $\preceq_{m}$. Interval dalam $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ berbentuk $\mathrm{x} = [\,\underline{x}\,,\ \overline{x}\,] = \{\, x \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+} \mid \underline{x} \preceq_{m} x \preceq_{m} \overline{x}\,\}$. Bilangan $x \in \mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ dapat dinyatakan dengan menggunakan interval $x = [x, x]$. Interval dalam $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+}$ misalnya [3, 5], [0, 2], [0, 0] = 0 dan $[\varepsilon, \varepsilon] = \varepsilon$.

Diberikan $(S,\ *,\ \bullet)$ adalah suatu semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral 0. Didefinisikan

$$\mathbf{I}(S) = \{\ \mathrm{x} = [\,\underline{x}\,,\ \overline{x}\,] \mid \underline{x}\,,\ \overline{x} \in S\,,\ 0 \prec \underline{x} \preceq \overline{x}\,\} \cup \{[0, 0]\}.$$

Pada $\boldsymbol{I}(S)$ didefinisikan operasi $\overline{*}$ dan $\overline{\bullet}$ dengan :

$\mathrm{x}\ \overline{*}\ \mathrm{y} = [\,\underline{x} * \underline{y}\,,\ \overline{x} * \overline{y}\,]$ dan $\mathrm{x}\ \overline{\bullet}\ \mathrm{y} = [\,\underline{x} \bullet \underline{y}\,,\ \overline{x} \bullet \overline{y}\,]$ untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{I}(S)$ (Litvinov & Sobolevskii, 2001).

Operasi yang didefinisikan di atas terdefinisi dengan baik (*well defined*), yaitu memenuhi syarat tertutup dan bernilai tunggal. Ambil sembarang $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{I}(S)$. Jika salah satu dari x, y sama dengan $[0, 0]$, maka $\mathrm{x}\ \overline{*}\ \mathrm{y}$ adalah interval itu sendiri dan $\mathrm{x}\ \overline{\bullet}\ \mathrm{y} = [0, 0]$, sedangkan jika keduanya sama dengan $[0, 0]$, maka $\mathrm{x}\ \overline{*}\ \mathrm{y}$ dan $\mathrm{x}\ \overline{\bullet}\ \mathrm{y}$ keduanya sama dengan $[0, 0]$. Jika x, y keduanya $\neq [0, 0]$, maka $\underline{x}\,, \overline{x} \in S$ dan $0 \prec \underline{x} \preceq \overline{x}$, $\underline{y}\,,\ \overline{y} \in S$ dan $0 \prec \underline{y} \preceq \overline{y}$. Mengingat $0 \prec \underline{x}$, maka $0 \preceq \underline{x}$ dan $\underline{x} \neq 0$, juga karena $0 \prec \underline{y}$, maka $0 \preceq \underline{y}$ dan $\underline{y} \neq 0$. Mengingat $0 * (\,\underline{x} * \underline{y}\,) = \underline{x} * \underline{y}$, maka $0 \preceq \underline{x} * \underline{y}$, dan karena $\underline{x} \neq 0$ dan $\underline{y} \neq 0$ maka $\underline{x} * \underline{y} \neq 0$. Hal ini berarti $0 \prec \underline{x} * \underline{y}$. Mengingat $\underline{x} \preceq \overline{x}$, $\underline{y} \in S$ dan S semiring idempoten, maka operasi $*$ konsisten terhadap urutan $\preceq$, maka $\underline{x} * \underline{y} \preceq \overline{x} * \underline{y}$. Mengingat $\underline{y} \preceq \overline{y}$, $\overline{x} \in S$ dan S konsisten terhadap $*$ maka $\overline{x} * \underline{y} \preceq \overline{x} * \overline{y}$. Oleh karena itu $\underline{x} * \underline{y} \preceq \overline{x} * \overline{y}$. Jadi $0 \prec \underline{x} * \underline{y} \preceq \overline{x} * \overline{y}$, yang berarti $x \;\overline{*}\; y \in \mathbf{I}(S)$.

Dengan cara yang sama seperti pada operasi $\overline{*}$ di atas dapat ditunjukkan bahwa $0 \preceq \underline{x} \bullet \underline{y}$. Mengingat $\underline{x} \neq 0$ dan $\underline{y} \neq 0$ serta S tidak memuat pembagi nol, maka $\underline{x} \bullet \underline{y} \neq 0$. Hal ini berarti $0 \prec \underline{x} \bullet \underline{y}$. Dengan cara yang sama seperti pada operasi $\overline{*}$ di atas dapat ditunjukkan bahwa $\underline{x} \bullet \underline{y} \preceq \overline{x} \bullet \overline{y}$. Jadi $0 \prec \underline{x} \bullet \underline{y} \preceq \overline{x} \bullet \overline{y}$, yang berarti $x \;\overline{\bullet}\; y \in \mathbf{I}(S)$.

Sedangkan ketunggalan hasil operasi dapat dijelaskan sebagai berikut. Akan ditunjukkan ketunggalan untuk operasi $\overline{*}$, sedangkan untuk operasi $\overline{\bullet}$ analog. Ambil sembarang w, x, y, dan z $\in \mathbf{I}(S)$ sedemikian hingga w = y dan x = z. Mengingat w = y dan x = z maka $[\underline{w}, \overline{w}] = [\underline{y}, \overline{y}]$ dan $[\underline{x}, \overline{x}] = [\underline{z}, \overline{z}]$ atau $\underline{w} = \underline{y}$, $\overline{w} = \overline{y}$, $\underline{x} = \underline{z}$, $\overline{x} = \overline{z}$. Hal ini berarti $\underline{w} * \underline{x} = \underline{y} * \underline{z}$ dan $\overline{w} * \overline{x} = \overline{y} * \underline{z}$ atau $[\underline{w} * \underline{x}, \overline{w} * \overline{x}] = [\underline{y} * \underline{z}, \overline{y} * \underline{z}]$. Jadi $w \;\overline{*}\; x = y \;\overline{*}\; z$, yang berarti bahwa hasil operasi tersebut tunggal.

Teorema 1
Diberikan $(S, *, \bullet)$ adalah suatu semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral 0. $(\mathbf{I}(S), \overline{*}, \overline{\bullet})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral $0_I = [0, 0]$ dan elemen satuan $1_I = [1, 1]$.

Bukti: Bahwa $\mathbf{I}(S)$ tertutup terhadap operasi $\overline{*}$ dan $\overline{\bullet}$ sudah dijelaskan pada penjelasan setelah pendefinisian operasi interval di atas. Selanjutnya karena operasi-operasi $\overline{*}$ dan $\overline{\bullet}$ pada ($\mathbf{I}(S)$,) didefinisikan komponen demi komponen dari S, maka sifat-sifat pada $(\mathbf{I}(S), \overline{*}, \overline{\bullet})$ mengikuti seluruh sifat-sifat pada $(S, *, \bullet)$ yang merupakan semiring idempoten, dengan elemen netral 0 dan elemen satuan 1. Dengan demikian terbukti bahwa $(\mathbf{I}(S), \overline{*}, \overline{\bullet})$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $0_I = [0, 0]$ dan elemen satuan $1_I = [1, 1]$. ■

Mengingat $(\mathbf{I}(S), \overline{*})$ merupakan semigrup komutatif, maka relasi "$\preceq_I$" yang didefinisikan pada $\mathbf{I}(S)$ dengan $x \preceq_I y \Leftrightarrow x \;\overline{*}\; y = y \Leftrightarrow \underline{x} \preceq \underline{y}$ dan $\overline{x} \preceq \overline{y}$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{I}(S)$.

Contoh 2
Telah diketahui $(\mathbf{R}^+_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral ε. Didefinisikan

$$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon = \{ x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}^+,\ \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x} \} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ sebagai berikut

$$x \,\overline{\oplus}\, y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] \text{ dan } x \,\overline{\otimes}\, y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}] \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon.$$

Misalnya $[1, 3] \,\overline{\oplus}\, [0, 2] = [1, 3]$, $[1, 3] \,\overline{\otimes}\, [0, 2] = [0, 2]$,
$[1, 4] \,\overline{\oplus}\, [2, 3] = [2, 4]$, dan $[1, 4] \,\overline{\otimes}\, [2, 3] = [1, 3]$.

Menurut Teorema 1 di atas $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral $0 = [0, 0]$ dan elemen satuan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. Lebih lanjut karena $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif, maka $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut *aljabar max-min interval* yang cukup dituliskan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Teorema 2

Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, *dengan* $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ *dan* $\mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$, *berlaku bahwa i)* $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] = \mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y}$ *dan ii)* $[\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}] = \mathbf{x} \overline{\otimes} \mathbf{y}$,

di mana $\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = \{t \in \mathbf{R}^+_\varepsilon \mid t = x \oplus y, x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ *dan*

$\mathbf{x} \overline{\otimes} \mathbf{y} = \{t \in \mathbf{R}^+_\varepsilon \mid t = x \otimes y, x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$.

Bukti:

i) Ambil sembarang $t \in \mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y}$ dan misalkan $x \in \mathbf{x}$ dan $y \in \mathbf{y}$ sedemikian hingga $t = x \oplus y$. Mengingat $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ adalah interval, maka $\underline{x} \preceq x \preceq \overline{x}$ dan $\underline{y} \preceq y \preceq \overline{y}$. Mengingat operasi $\oplus$ konsisten terhadap urutan $\preceq$, maka $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq x \oplus y \preceq \overline{x} \oplus \overline{y}$, sehingga $x \oplus y \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$. Jadi $\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} \subseteq [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$.

Ambil sembarang $t \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$, maka $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq t \preceq \overline{x} \oplus \overline{y}$. Andaikan $t \notin \mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y}$, maka untuk setiap $x \in \mathbf{x}$ dan untuk setiap $y \in \mathbf{y}$ berlaku $t \neq x \oplus y$, karena urutan " $\preceq$" dalam $\mathbf{R}^+_\varepsilon$ merupakan urutan total, berarti $t \prec x \oplus y$ atau $t \succ x \oplus y$. Mengingat $\underline{x} \in \mathbf{x}$ dan $\underline{y} \in \mathbf{y}$ maka $t \prec \underline{x} \oplus \underline{y}$ atau $t \succ \underline{x} \oplus \underline{y}$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi $t \in \mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y}$, yang berarti $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] \subseteq \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$. Dengan demikan terbukti $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] = \mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y}$.

ii) Analog dengan pembuktian *i*) di atas. ■

Mengingat $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi "$\preceq_{\mathrm{Im}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, dengan $\mathbf{x} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = \mathbf{y}$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$,. Perhatikan bahwa $\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \underline{x} \preceq_m \underline{y}$ dan $\overline{x} \preceq_m \overline{y}$. Relasi "$\preceq_{\mathrm{Im}}$" ini bukan merupakan urutan total, karena terdapat $\mathbf{x} = [-1, 3]$ dan $\mathbf{y} = [0, 1]$ dengan $\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = [-1, 3] \overline{\oplus} [0, 1] = [0, 3]$, sehingga $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \neq \mathbf{y}$ dan $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

1. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan semua interval dalam aljabar max-min yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum interval merupakan semiring idempoten komutatif. Lebih lanjut relasi urutan yang didefinisikan pada aljabar max-min dapat digeneralisir dalam aljabar max-min interval dan juga merupakan relasi urutan total.

Hasil dalam pembahasan di atas selanjutnya dapat dilanjutkan untuk membahas matriks atas aljabar max-min interval dan aljabar max-min bilangan kabur di mana bilangan kabur dipandang sebagai keluarga himpunan tersarang interval-interval real.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Gondran, M and Minoux, M. 2008. *Graph, Dioids and Semirings*. New York: Springer.

Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. 2001. Idempotent Interval Anaysis and Optimization Problems. *Reliab. Comput.*, 7, 353 – 377; arXiv: math.SC/ 010180.

Polya, G. 1998. Generalization, Specialization, Analogy. New directions in the philosophy of mathematics. Princeton: Princeton University Press. pp. 103 – 124.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2008. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur. *Berkala Ilmiah MIPA Majalah Ilmiah Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam*. Vol. 18 (2): pp. 153-164.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011a. Systems of Fuzzy Number Max-Plus Linear Equations. *Journal of the Indonesian Mathematical Society* Vol. 17 No. 1.

Rudhito, Andy. 2011b. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur*. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

ALJABAR MAX-MIN INTERVAL

ORIGINALITY REPORT

4%	4%	1%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	www.scitepress.org Internet Source	1%
2	jmua.fmipa.unand.ac.id Internet Source	1%
3	issuu.com Internet Source	1%
4	123doc.org Internet Source	1%
5	mathandy.blogspot.com Internet Source	<1%

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 5 words
Exclude bibliography	On		