Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author:	M Andy Rudhito
Assignment title:	Periksa similarity
Submission title:	Aljabar Max-Min Bilangan Kabur dan Matriks
File name:	33-Aljabar_Max-Min_Bilangan_Kabur_dan_Matriks.pdf
File size:	5.24M
Page count:	8
Word count:	124
Character count:	378
Submission date:	20-Apr-2022 09:14AM (UTC+0700)
Submission ID:	1815043993


Jurnal Matematika & Sains, April 2016, Vol. 21 Nomor 1

Aljabar Max-Min Bilangan Kabur dan Matriks

M. Andy Rudhito[1], dan D. Arif Budi Prasetyo[2]
1,2 Jurusan PendidikanMatematika dan IPA, Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
Email : aridhito@yahii.co.id dan dominic_abp@yahoo.co.id

Diterima 03 Februari 2015, disetujui untuk dipublikasikan 20 Maret 2015

Abstrak

Artikel ini membahas suatu aljabar himpunan semua bilangan kabur (fuzzy number) yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum, serta matriks atas aljabar tersebut. Aljabar ini merupakan perluasan aljabar max-min melalui aljabar max-min interval dan Teorema Dekomposisi dalam himpunan kabur. Dapat ditunjukkan operasi maximum dan minimum yang didefinisikan melalui potongan-alfa tertutup dalam himpunan semua bilangan kabur tersebut. Himpunan semua bilangan kabur yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum tersebut merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya himpunan semua matriks atas atas aljabar tersebut merupakan semimodul. Diberikan pula contoh perhitungannya dengan menggunakan Program MATLAB.

Kata Kunci: semiring, aljabar max-min, bilangan kabur, matriks, semimodul.

1. Pendahuluan

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah lintasan kapasitas maksimum dan sistem produksi [1] dan [2].

Dalam masalah pemodelan dan penyelesaian masalah lintasan kapasitas maksimum, kapasitas dalam suatu jaringan, yaitu aliran maksimum dari suatu titik ke titik yang lain, kadang tidak dapat diketahui dengan pasti, misalkan karena jaringan masih dalam tahap perencanaan, data-data mengenai kapasitas maupun distribusinya belum diketahui secara pasti. Kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Misalkan, pimpinan proyek menyatakan: " Aliran maksimum dari titik A ke titik B sekitar 5 ton". Seiring dengan perkembangan teori kabur (*fuzzy theory*), konstanta maupun parameter seperti di atas ditangani sebagai bilangan kabur (*fuzzy number*). Kapasitas-kapasitas dalam jaringan dapat dimodelkan dengan bilangan kabur.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas bilangan kabur, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-min. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil yang analitis dan lebih mudah dalam komputasinya. Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah-masalah jaringan perlu juga menggunakan konsep-konsep perluasannya, yaitu matriks dan vektor atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti dalam [1] dan [2]. Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah-masalah jaringan dengan waktu kapasitas bilangan kabur, seperti kapasitas maksimum lintasan kabur, dengan pendekatan aljabar max-min, aljabar max-min perlu digeneralisasi menjadi aljabar max-min bilangan kabur dan juga konsep-konsep perluasannya, yaitu matriks dan vektor atas aljabar max-min bilangan kabur. Dalam artikel ini hanya akan dibahas pengertian dan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min bilangan kabur dan matriks atas aljabar max-min bilangan kabur. Hasil penelitian ini selanjutnya diharapkan dapat menjadi dasar dalam pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas bilangan kabur dalam penelitian-penelian selanjutnya.

2. Tinjauan Pustaka

Aljabar max-plus, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan plus (penjumlahan)telah berhasil digeneralisasikan menjadi aljabar max-plus bilangan kabur [5]. Aljabar max-plus bilangan kabur ini telah dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan dan antrian kabur, yaitu di mana waktu aktifitasnya berupa bilangan kabur [6]. Konsep-konsep dasar aljabar max-min secara umum analog dengan aljabar max-plus, di mana aljabar max-plus merupakan semifield yaitu semiring komutatif yang setiap elemen taknolnya mempunyai invers terhadap operasi perkalian [7].

Operasi-operasi aritmatika seperti +, −, ×, /, max dan min pada bilangan kabur pada umumnya didefinisikan dengan menggunakan Prinsip Perluasan (*Extension Principle*) dan dengan menggunakan potongan-α (α-*cut*) yang didasarkan pada Teorema Dekomposisi. Hal ini dapat dilihat dalam [3] dan [9]. Dalam [9] ditegaskan bahwa setiap bilangan kabur dapat dinyatakan secara tunggal dengan menggunakan potongan-α-nya. Karena potongan-α

Aljabar Max-Min Bilangan Kabur dan Matriks

by Rudhito M Andy

Jurnal Matematika & Sains, April 2016, Vol. 21 Nomor 1

Aljabar Max-Min Bilangan Kabur dan Matriks

***M. Andy Rudhito**[1], dan D. Arif Budi Prasetyo[2]*
1,2 Jurusan PendidikanMatematika dan IPA, Universitas Sanata Dharma
Kampus III USD Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
Email : aridhito@yahii.co.id dan dominic_abp@yahoo.co.id

Diterima 03 Februari 2015, disetujui untuk dipublikasikan 20 Maret 2015

Abstrak

Artikel ini membahas suatu aljabar himpunan semua bilangan kabur (fuzzy number) yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum, serta matriks atas aljabar tersebut. Aljabar ini merupakan perluasan aljabar max-min melalui aljabar max-min interval dan Teorema Dekomposisi dalam himpunan kabur. Dapat ditunjukkan operasi maximum dan minimum yang didefinisikan melalui potongan-alfa tertutup dalam himpunan semua bilangan kabur tersebut. Himpunan semua bilangan kabur yang dilengkapi dengan operasi maximum dan minimum tersebut merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya himpunan semua matriks atas atas aljabar tersebut merupakan semimodul. Diberikan pula contoh perhitungannya dengan menggunakan Program MATLAB.

Kata Kunci: semiring, aljabar max-min, bilangan kabur, matriks, semimodul.

1. Pendahuluan

Aljabar max-min, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan min (minimum), telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah lintasan kapasitas maksimum dan sistem produksi [1] dan [2].

Dalam masalah pemodelan dan penyelesaian masalah lintasan kapasitas maksimum, kapasitas dalam suatu jaringan, yaitu aliran maksimum dari suatu titik ke titik yang lain, kadang tidak dapat diketahui dengan pasti, misalkan karena jaringan masih dalam tahap perencanaan, data-data mengenai kapasitas maupun distribusinya belum diketahui secara pasti. Kapasitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Misalkan, pimpinan proyek menyatakan: " Aliran maksimum dari titik A ke titik B sekitar 5 ton". Seiring dengan perkembangan teori kabur (*fuzzy theory*), konstanta maupun parameter seperti di atas ditangani sebagai bilangan kabur (*fuzzy number*). Kapasitas-kapasitas dalam jaringan dapat dimodelkan dengan bilangan kabur.

Pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas bilangan kabur, sejauh peneliti ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-min. Seperti telah diketahui pendekatan penyelesaian masalah jaringan dengan menggunakan aljabar max-min dapat memberikan hasil yang analitis dan lebih mudah dalam komputasinya. Pendekatan aljabar max-min untuk menyelesaikan masalah-masalah jaringan perlu juga menggunakan konsep-konsep perluasannya, yaitu matriks dan vektor atas aljabar max-min dan sistem persamaan linear max-min, seperti dalam [1] dan [2]. Dengan demikian, untuk menyelesaikan masalah-masalah jaringan dengan waktu kapasitas bilangan kabur, seperti kapasitas maksimum lintasan kabur, dengan pendekatan aljabar max-min, aljabar max-min perlu digeneralisasi menjadi aljabar max-min bilangan kabur dan juga konsep-konsep perluasannya, yaitu matriks dan vektor atas aljabar max-min bilangan kabur. Dalam artikel ini hanya akan dibahas pengertian dan konsep-konsep dasar dalam aljabar max-min bilangan kabur dan matriks atas aljabar max-min bilangan kabur. Hasil penelitian ini selanjutnya diharapkan dapat menjadi dasar dalam pemodelan dan analisa pada masalah lintasan kapasitas maksimum dengan kapasitas bilangan kabur dalam penelitian-penelian selanjutnya.

2. Tinjauan Pustaka

Aljabar max-plus, yaitu himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max (maksimum) dan plus (penjumlahan)telah berhasil digeneralisasikan menjadi aljabar max-plus bilangan kabur [5]. Aljabar max-plus bilangan kabur ini telah dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan dan antrian kabur, yaitu di mana waktu aktifitasnya berupa bilangan kabur [6]. Konsep-konsep dasar aljabar max-min secara umum analog dengan aljabar max-plus, di mana aljabar max-plus merupakan semifield yaitu semiring komutatif yang setiap elemen taknolnya mempunyai invers terhadap operasi perkalian [7].

Operasi-operasi aritmatika seperti +, –, ×, /, max dan min pada bilangan kabur pada umumnya didefinisikan dengan menggunakan Prinsip Perluasan (*Extension Principle*) dan dengan menggunakan potongan-α (α-*cut*) yang didasarkan pada Teorema Dekomposisi. Hal ini dapat dilihat dalam [3] dan [9]. Dalam [9] ditegaskan bahwa setiap bilangan kabur dapat dinyatakan secara tunggal dengan menggunakan potongan-α-nya. Karena potongan-α

suatu bilangan kabur berupa interval tertutup maka operasi-operasi aritmatika pada bilangan kabur dapat dinyatakan menggunakan operasi-operasi aritmatika interval tertutup. Ditegaskan juga dalam [9] bahwa operasi bilangan kabur dengan menggunakan Prinsip Perluasan dan dengan menggunakan potongan-α adalah ekivalen.

Pembahasan mengenai semiring telah dikembangkan ke dalam Analisis Interval Idempoten [4]. Analisis Interval Idempoten ini membahas semiring dengan elemen-elemennya berupa interval tertutup. Dalam [4] di atas dikatakan bahwa himpunan semua interval tertutup dalam suatu semiring idempoten juga merupakan semiring idempoten dengan operasi yang bersesuaian. Ditunjukkan juga bahwa sifat-sifat yang dimiliki semiring juga dimiliki oleh semiring himpunan semua interval tertutup tersebut.

Dengan memperhatikan hasil-hasil di atas, aljabar max-min telah dapat digeneralisir ke dalam aljabar max-plus interval, di mana elemen-elemennya berupa interval tertutup dalam aljabar max-min tersebut [7]. Aljabar max-min interval juga telah diperluas konsepnya ke dalam matriks dan vektor atas aljabar max-min interval [8]. Selanjutnya dengan mengambil pengoperasian maximum dan minimum bilangan kabur melalui potongan-α-nya, akan dapat dibahas aljabar max-min bilangan kabur dan perluasannya dalam konsep matriks dan vektor atas aljabar max-min bilangan kabur. Teknis perhitungan dalam artikel ini akan memanfaatkan program *MATLAB.*

3. Landasan Teori

Terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil dalam aljabar max-min, aljabar max-min interval, himpunan kabur dan bilangan kabur yang menjadi landasan pembahasan aljabar max-min bilangan kabur.

3.1 . Aljabar Max-Min dan Matriks

Berikut ditinjau beberapa pengertian dan konsep dasar tentang aljabar max-min dan matriks atas aljabar max-min yang selengkapnya dapat dilihat pada [1], [2], [7] dan [8].

Suatu*semiring* $(S,*,\bullet)$ adalah suatu himpunan takkosong Syang dilengkapi dengan dua operasi biner $*$ dan $\bullet$, yang memenuhi aksioma berikut

i) $(S, *)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral0, yaitu berlaku

$(a*b)*c = a*(b*c)$, $a*b = b*a$, $a*0 = a$, $\forall a, b, c\in S$.

ii) $(S, \bullet)$ adalahsemigrup dengan elemen satuan1, yaituberlaku

$(a\bullet b)\bullet c = a\bullet(b\bullet c)$, $a\bullet 1 = 1\bullet a = a$, $\forall a, b, c\in S$.

iii) Elemen netral0merupakan elemen penyerap terhadap operasi$\bullet$,yaituberlaku

$a\bullet 0 = 0\bullet a = 0$, $\forall a\in S$.

iv) Operasi $*$ distributif terhadap$\bullet$, yaitu berlaku

$(a*b)\bullet c = (a\bullet c)*(b\bullet c)$, $a\bullet(b*c) = (a\bullet b)*(a\bullet c)$, $\forall a, b, c\in S$.

Semiring $(S,*, \bullet)$ dikatakan*idempoten*jika operasi $*$ bersifat idempoten, yaitu berlaku $a*a = a$ untuk setiap $a\in S$, dan dikatakan*komutatif* jika operasi$\bullet$bersifat komutatif. Suatu semiring komutatif $(S,*, \bullet)$ disebut*semifield*jika setiap elemen taknetralnya mempunyai invers terhadap operasi $\bullet$. Dapat ditunjukkan bahwa jika$(S,*)$ merupakan semigrup komutatif idempoten maka relasi "$\preceq$" yang didefinisikanpada$S$dengan$x\preceq y \Leftrightarrow x*y = y$merupakan *urutan parsial* pada$S$. Operasi $*$ dan $\times$ dikatakan *konsisten* terhadap urutan "$\preceq$" dalam S bila dan hanya bila jika $x\preceq y$, maka $x*z \preceq y*z$ dan $x\times z \preceq y\times z$ untuk setiap $x, y, z \in S$. Dalam semiring idempoten $(S,*,\bullet)$ operasi $*$ dan $\bullet$ konsisten terhadap urutan $\preceq$ dalam S. Semiring $(S,*, \bullet)$ dengan elemen netral 0dikatakan *tidak memuat pembagi nol* bila dan hanya bila, jika $x\bullet y = 0$maka $x = 0$atau $y = 0$ untuk setiap $x, y \in S$.

Diberikan $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+} := \mathrm{R}^{+}\cup\{\varepsilon\}$ dengan R^{+} adalah himpunan semua bilangan real nonnegatip dan $\varepsilon := +\infty$. Pada $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$ didefinisikan operasi berikut:

$\forall a,b \in \mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$, $a\oplus b := \max(a, b)$ dan$a\otimes b := \min(a, b)$.

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $0 = 0$ dan elemen satuan $\varepsilon = +\infty$. Kemudian $(\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-min*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$. Karena $(\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, maka relasi"$\preceq_{\mathrm{m}}$" yang didefinisikan pada $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$ dengan$x\preceq_{\mathrm{m}} y\Leftrightarrow x\oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$.Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$. Karena $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$ merupakan semiring idempoten, maka operasi $\oplus$ dan $\otimes$*konsisten* terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$, jika $a\preceq_{\mathrm{m}} b$, maka $a\oplus c \preceq_{\mathrm{m}} b\oplus c$, dan $a\otimes c \preceq_{\mathrm{m}} b\otimes c$. Aljabar max-min $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall x, y \in \mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$ berlaku: jika $x\otimes y = \min(x, y) = 0$,maka $x = 0$atau $y = 0$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathrm{R}_{\varepsilon}^{+}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n} := \{A =$

$(A_{ij}) \mid A_{ij} \in R_\varepsilon^+$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Untuk $\alpha \in R_\varepsilon^+$ dan A, $B \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ didefinisikan $\alpha\otimes A$, dengan $(\alpha\otimes A)_{ij} = \alpha\otimes A_{ij}$ dan $A\oplus B$, dengan $(A\oplus B)_{ij} = A_{ij}\oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A\in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times p}$, $B\in \mathbf{R}_\varepsilon^{+p\times n}$ didefinisikan $A\otimes B$, dengan $(A\otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik}\otimes B_{kj}$. Matriks A, $B\in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ dikatakan *sama* jika $A_{ij} = B_{ij}$ untuk setiap *i* dan *j*.

3.2. Aljabar Max-Min Interval dan Matriks

Berikut ditinjau konsep dasar aljabar max-min interval yang merupakan generalisasi aljabar max-min dan akan digunakan sebagai dasar pembahasan aljabar max-min bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada [7] dan [8].

Telah diketahui R_ε^+ merupakan himpunan terurut parsial dengan relasi $\preceq_m$. Interval dalam R_ε^+ berbentuk $x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{ x \in R_\varepsilon^+ \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \overline{x} \}$. Bilangan $x \in R_\varepsilon^+$ dapat dinyatakan dengan menggunakan interval $x = [x, x]$. Interval dalam R_ε^+ misalnya $[3, 5]$, $[0, 2]$, $[0, 0] = 0$ dan $[\varepsilon, \varepsilon] = \varepsilon$.

Telah diketahui pula $(R_\varepsilon^+, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dan tidak memuat pembagi nol, dengan elemen netral ε. Didefinisikan

$$\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}^+, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x} \} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ [4] sebagai berikut

$x \,\overline{\oplus}\, y = [\underline{x}\oplus\underline{y}, \overline{x}\oplus\overline{y}]$ dan $x \,\overline{\otimes}\, y = [\underline{x}\otimes\underline{y}, \overline{x}\otimes\overline{y}]$ untuk setiap $x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Misalnya $[1, 3] \,\overline{\oplus}\, [0, 2] = [1\oplus 0, 3\oplus 2] = [\max(1, 0), \max(3, 2)] = [1, 3]$ dan

$[1, 3] \,\overline{\otimes}\, [0, 2] = [1\otimes 0, 3\otimes 2] = [\min(1, 0), \min(3, 2)] = [0, 2]$.

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral $0 = [0, 0]$ dan elemen satuan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. Lebih lanjut karena $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif, maka $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Selanjutnya $(\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut *aljabar max-min interval* yang cukup dituliskan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$.

Selanjutnya operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ pada $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$ di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, untuk $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ disebut *matriks interval* max-min. Matriks A, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$ dikatakan *sama* jika $A_{ij} = B_{ij}$.

i) Diketahui $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, A, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $\overline{\otimes}$ dengan $\alpha \,\overline{\otimes}\, A$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya: $(\alpha \,\overline{\otimes}\, A)_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, A_{ij}$, dan operasi $\overline{\oplus}$ dengan $A \,\overline{\oplus}\, B$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya: $(A \,\overline{\oplus}\, B)_{ij} = A_{ij} \,\overline{\oplus}\, B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$.

ii) Diketahui $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times p}$, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{p\times n}$. Didefinisikan operasi $\overline{\otimes}$ dengan $A \,\overline{\otimes}\, B$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya: $(A \,\overline{\otimes}\, B)_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} A_{ik} \,\overline{\otimes}\, B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$.

Untuk mempermudah teknis pengoperasian matriks interval konsep interval matriks dari suatu matriks interval. Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n}$, didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A_{ij}}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A_{ij}}) \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriks interval A. Didefinisikan pula *interval matriks* dari A, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}\}$ dan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b = \{ [\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon^{m\times n} \}$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$ dikatakan *sama* jika $\underline{A} = \underline{B}$ dan $\overline{A} = \overline{B}$. Didefinisikan operasi-operasi interval matriks berikut.

i) Diberikan $\alpha = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_\varepsilon$, $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_\varepsilon^{+m\times n})_b$. Didefinisikan

$\alpha \,\overline{\otimes}\, [\underline{A}, \overline{A}] := [\underline{\alpha}\otimes\underline{A}, \overline{\alpha}\otimes\overline{A}]$ dan

$[\underline{A}, \overline{A}] \,\overline{\oplus}\, [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A}\oplus\underline{B}, \overline{A}\oplus\overline{B}]$

ii) Diberikan$[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times p})_b$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+p\times n})_b$.Didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] := [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n}$ selalu dapat ditentukan dengan tunggal *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$, dan sebaliknya. Jadi matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$. Matriks interval A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n}$ *bersesuaian dengan* interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon}^{+m\times n})_b$, dan dituliskan "A $\approx [\underline{A}, \overline{A}]$". Dapat ditunjukkan pula$\alpha \overline{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$,$A \overline{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

3.3. Himpunan Kabur dan Bilangan Kabur

Berikut ditinjau pengertian dan konsep dasar himpunan dan bilangan kabur. Uraian lebih lengkap dapat dilihat dalam [3] dan [9].

Suatu himpunan A dalam semesta X dapat dinyatakan dengan *fungsi karakteristik*$\chi_A: X \to \{0, 1\}$ yang didefinisikan dengan aturan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{jika } x \in A \\ 0, \text{jika } x \notin A \end{cases} \text{untuk setiap } x \in X.$$

Himpunan kabur $\widetilde{K}$ dalam semesta X dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut $\widetilde{K} = \{(x, \mu_{\widetilde{K}}(x)) | x \in X\}$, di mana $\mu_{\widetilde{K}}$ adalah fungsi keanggotaan himpunan kabur $\widetilde{K}$, yang merupakan suatu pemetaan dari semesta X ke interval tertutup [0, 1]. *Pendukung* (*support*) suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, dilambangkan dengan *pend*($\widetilde{K}$) adalah himpunan tegas (*crisp*) yang memuat semua anggota semesta yang mempunyai derajat keanggotaan taknol dalam $\widetilde{K}$, yaitu *pend*($\widetilde{K}$) = $\{x \in X | \mu_{\widetilde{K}}(x) > 0\}$. *Tinggi (height)* suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, dilambang-kan dengan *tinggi*($\widetilde{K}$), didefinisikan sebagai *tinggi*($\widetilde{K}$) = $\sup_{x \in X}\{\mu_{\widetilde{K}}(x)\}$. Suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$ dikatakan *normal* jika *tinggi*($\widetilde{K}$) = 1.

Untuk suatu bilangan $\alpha \in [0, 1]$, *potongan-α* suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$, yang dilambangkan dengan $\text{pot}^{\alpha}(\widetilde{K}) = K^{\alpha}$, adalah himpunan crisp (tegas) yang memuat semua elemen semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\widetilde{K}$ lebih besar atau sama dengan α, yang didefinisikan sebagai $K^{\alpha} = \{x \in X | \mu_{\widetilde{K}}(x) \geq \alpha\}$. Salah satu sifat potongan-α suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$ adalah jika $\alpha_1 \leq \alpha_2$ maka $K^{\alpha_2} \subseteq K^{\alpha_1}$,yang disebut dengan sifat tersarang (*nested*). Suatu himpunan kabur $\widetilde{K}$ dikatakan *konveks* jika K^{α} konveks $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Teorema Dekomposisi. [9] Jika K^{α} adalah potongan-α himpunan kabur $\widetilde{K}$ dalam semesta X dan $\widetilde{K}^{\alpha}$ adalah himpunan kabur dalam X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{K}^{\alpha}}(x) = \alpha\, \chi_{K^{\alpha}}(x)$, di mana $\chi_{K^{\alpha}}$ adalah fungsi karakteristik himpunan K^{α}, maka $\widetilde{K} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \widetilde{K}^{\alpha}$.

Teorema Representasi. [6] Jika $\{K^{\alpha}\}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ adalah keluarga himpunan dalam semesta X yang memenuhi sifat tersarang (nested), yaitu jika $\alpha \leq \beta$ maka berlaku $K^{\alpha} \supseteq K^{\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, maka terdapat dengan tunggal himpunan kabur $\widetilde{L}$ dalam semesta X sedemikian hingga $L^{\alpha} = K^{\alpha}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Bilangan kabur $\widetilde{a}$ didefinisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta **R** yang memenuhi sifat berikut:

i) normal, yaitu $a^1 \neq \emptyset$

ii) $\forall \alpha \in (0, 1]$, a^{α} adalah interval tertutup dalam **R**, yaitu $\exists\, \underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha} \in \mathbf{R}$ dengan $\underline{a}^{\alpha} \leq \overline{a}^{\alpha}$ sedemikian sehingga $a^{\alpha} = [\underline{a}^{\alpha}, \overline{a}^{\alpha}] = \{x \in \mathbf{R} | \underline{a}^{\alpha} \leq x \leq \overline{a}^{\alpha}\}$.

iii) *pend*($\widetilde{a}$) terbatas.

Untuk $\alpha = 0$, didefinisikan bahwa $a^0 = [inf(pend(\widetilde{a})), sup(pend(\widetilde{a}))]$. Karena setiap interval tertutup dalam **R** adalah konveks maka a^{α} konveks $\forall \alpha \in [0, 1]$, sehingga $\widetilde{a}$ konveks.

Suatu *bilangan kabur titik* $\widetilde{a}$ adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ jika } x = a \\ 0, \text{ lainnya} \end{cases}$$

.Salah satu tipe bilangan kabur yang sederhana adalah *bilangan kabur trapesium*[3]. Bilangan kabur trapesium $\widetilde{a}$, dilambang BKT(a_1, a_2, a_3, a_4), adalah suatu bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{untuk } a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & \text{untuk } a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{untuk } a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$,di

mana $a_1 \neq a_2$ dan $a_3 \neq a_4$.

BKT(a_1, a_2, a_3, a_4) cukup dituliskan dengan (a_1, a_2, a_3, a_4). Rumus potongan-α -nya :$a^\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1 , (a_3 - a_4)\alpha + a_4]$ dan *pend*(BKT(a_1, a_2, a_3, a_4)) = (a_1 , a_4).Bilangan kabur BKT(a_1, a_2, a_3, a_4) dengan $a_2 = a_3 = a$ yaitu BKT(a_1, a, a, a_4) disebut *bilangan kabur segitiga* dan dilambangkan dengan BKS(a_1, a, a_4) atau (a_1, a, a_4). Dua bilangan kabur $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dikatakan *sama* jika $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{b}}$. Karena $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{b}}$ maka berlaku $a^\alpha = b^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Sebaliknya menurut Teorema Dekomposisi jika $a^\alpha = b^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, maka $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{b}}$. Dengan demikan dapat dikatakan bahwa $\tilde{a} = \tilde{b}$ jika dan hanya jika $a^\alpha = b^\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Suatu keluarga interval tertutup dalam **R** $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$dikatakan *tersarang* jika untuk $\alpha \le \beta$maka berlaku $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \supseteq [a_1(\beta), a_2(\beta)]$ untuk setiap $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Dalam [6] telah dibahas syarat bahwa suatu keluarga interval merupakan potongan-αsuatu bilangan kabur sebagai berikut. Jika keluarga interval tertutup dalam **R** $\{[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\}$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ memenuhi sifat

i) $[a_1(1), a_2(1)] \neq \emptyset$,
ii) $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ tersarang dan
iii) $[a_1(0), a_2(0)]$ terbatas,

maka terdapat dengan tunggal bilangan kabur $\tilde{a}$ sedemikian hingga $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = a^\alpha$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

4. Aljabar Max-Min Bilangan Kabur

Dalam pembahasan di sini, operasi bilangan kabur didefinisikan dengan menggunakan potongan-α.

Definisi 1. Misalkan $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ bilangan-bilangan kaburdengan $a^\alpha = [\underline{a^\alpha}, \overline{a^\alpha}]$dan $b^\alpha = [\underline{b^\alpha}, \overline{b^\alpha}]$, di mana $\underline{a^\alpha}$ dan $\overline{a^\alpha}$ berturut-turut adalah batas bawah dan batas atas interval a^α , sedangkan untuk $\underline{b^\alpha}$ dan $\overline{b^\alpha}$ analog,

i) Maksimum $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$, yaitu $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b}$ adalah himpunan kabur dengan potongan-α-nya adalah interval $[\underline{a^\alpha} \oplus \underline{b^\alpha}, \overline{a^\alpha} \oplus \overline{b^\alpha}]$, untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

ii) Minimum $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$, yaitu $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ adalah himpunan kabur dengan potongan-α-nya adalah interval $[\underline{a^\alpha} \otimes \underline{b^\alpha}, \overline{a^\alpha} \otimes \overline{b^\alpha}]$, untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$.

Untuk memperoleh fungsi keanggotaan hasil operasi pada bilangan kabur seperti di atas, dapat dengan menggunakan Teorema Dekomposisi. Dengan cara yang analog pada aljabar max-plus bilangan kabur [5] dan [6], dapat ditunjukkan bahwa potongan-potongan-αyang didefinisikan pada operasi di atas memenuhi syarat sebagai keluarga potongan-α dari suatu bilangan kabur. Selanjutnya dengan menggunakan Teorema Dekomposisi diperoleh bahwa $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b} = \tilde{c} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{c}^\alpha$, di mana $\tilde{c}^\alpha$ adalah himpunan kabur dalam **R** dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{c}^\alpha}(x) = \alpha \chi_{(a \oplus b)^\alpha}(x)$, di mana $\chi_{(a \oplus b)^\alpha}$ adalah fungsi karakteristik himpunan $(a \oplus b)^\alpha$. Demikian juga untuk operasi $\tilde{\otimes}$ dapat dilakukan dengan cara yang analog.

Contoh 1. Diberikan dua bilangan kabur trapesium $\tilde{a}$ = BKT(a_1, a_2, a_3, a_4), dan $\tilde{b}$ = BKT(b_1, b_2, b_3, b_4), maka $a^\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1 , (a_3 - a_4)\alpha + a_4]$ dan $b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha] = b^\alpha = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1 , (b_3 - b_4)\alpha + b_4]$.

Kemudian potongan-αdari $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b}$ dan $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ berturut-turut adalah

$[((a_2 - a_1)\alpha + a_1) \oplus ((b_2 - b_1)\alpha + b_1), ((a_3 - a_4)\alpha + a_4) \oplus ((b_3 - b_4)\alpha + b_4)]$ dan

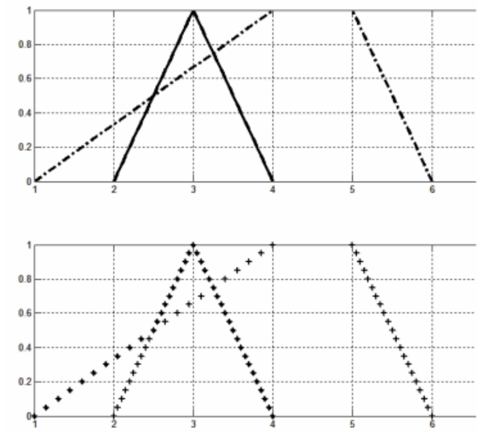
$[((a_2 - a_1)\alpha + a_1) \otimes ((b_2 - b_1)\alpha + b_1), ((a_3 - a_4)\alpha + a_4) \otimes ((b_3 - b_4)\alpha + b_4)]$.

Contoh 2 Misalkan $\tilde{a}$ = BKS(2, 3, 4) dan $\tilde{b}$ = BKT(1, 4, 5, 6), maka

$a^\alpha = [(3-2)\alpha + 2, (3-4)\alpha + 4] = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$ dan

$b^\alpha = [(4-1)\alpha + 1, (5-6)\alpha + 6] = [3\alpha + 1, -\alpha + 6]$.

Dengan bantuan program *MATLAB*, berikut diberikan grafik batas-batas potongan-α $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ (Gambar 1 atas) dan batas-batas potongan-α $\tilde{a} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{b}$ dan $\tilde{a} \,\tilde{\otimes}\, \tilde{b}$ untuk α = 0, 0.05, 0.1, ..., 1 (Gambar 1 bawah).



Gambar 1. Grafik Fungsi Keanggotaan Hasil Operasi BKS(2, 3, 4) dan BKT(1, 4, 5, 6)

Keterangan Gambar 1 : — : $\widetilde{a}$, —.— : $\widetilde{b}$, + :

$\widetilde{a}\ \widetilde{\oplus}\ \widetilde{b}$, * : $\widetilde{a}\ \widetilde{\otimes}\ \widetilde{b}$.

Dengan memperhatikan gambar di atas dan bahwa titik potong dari $\mu_{\widetilde{a}}(x) = x - 2$ dan $\mu_{\widetilde{b}}(x) = \dfrac{x-1}{3}$ adalah (2.5, 0.5), maka diperoleh fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{a}\widetilde{\oplus}\widetilde{b}}$ berikut.

$$\mu_{\widetilde{a}\widetilde{\oplus}\widetilde{b}}(x) = \begin{cases} x-2 & , 2 \le x \le 2.5 \\ \dfrac{x-1}{3} & , 2.5 < x \le 4 \\ 1 & , 4 \le x \le 5 \\ 6-x & , 5 < x \le 6 \\ 0 & , \text{yang lain} \end{cases} \quad \mu_{\widetilde{a}\widetilde{\otimes}\widetilde{b}}(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{5} & , 0 \le x \le 2.5 \\ x-2 & , 2.5 < x < 3 \\ 1 & , x = 3 \\ 4-x & , 3 < x \le 4 \\ 0 & , \text{yang lain} \end{cases}$$

Nampak bahwa hasil operasi maximum dan minimum dua buah bilangan kabur segitiga tidak selalu merupakan bilangan kabur trapesium.

Diberikan $\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\widetilde{\varepsilon}} := \mathbf{F}(\mathrm{R}^+) \cup \{\widetilde{\varepsilon}\}$ dengan $\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)$ adalah himpunan semua bilangan kabur positip dan $\widetilde{\varepsilon} : = \{-\infty\}$, dengan $\varepsilon^{\alpha} = [-\infty,-\infty]$ untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$. Pada $(\mathbf{F}(\mathrm{R}^+))_{\widetilde{\varepsilon}}$ didefinisikan operasi maximum $\tilde{\oplus}$ dan minimum $\tilde{\oplus}$, seperti yang diberikan di atas. Dengan cara yang analog dengan kasus aljabar max-plus seperti yang dilihat dalam dalam [6] dapat ditunjukkan bahwa struktur $(\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\widetilde{\varepsilon}},\ \tilde{\oplus},\ \tilde{\oplus})$ adalah semiring idempoten komutatifdengan elemen netral $\widetilde{e} = \{0\}$, dengan e^{α} =[0, 0] dan elemen satuan $\widetilde{\varepsilon} : = \{-\infty\}$, dengan ε^{α}= $[-\infty,-\infty]$, untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$. Semiring idempoten komutatif ini disebut *aljabar max-min bilangan kabur*, yang secara singkat cukup dituliskan $\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\widetilde{\varepsilon}}$.

5. Matriks atas Aljabar Max-Min Bilangan Kabur

Konsep-konsep dalam matriks atas aljabar max-min, juga dapat digeneralisir ke dalam matriks atas aljabar max-min bilangan kabur. Pembahasan didasarkan juga pada hasil-hasil dalam matriks dan vektor atas aljabar max-min interval.

Definisi 2. Didefinisikan $\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n} := \{\widetilde{A} = (\widetilde{A}_{ij}) \mid \widetilde{A}_{ij} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\widetilde{\varepsilon}}$, untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n }. Matriks anggota $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\min}^{m\times n}$ disebut *matriks atas aljabar max-min bilangan kabur***.** Selanjutnya matriks di atas cukup disebut dengan *matriks bilangan kabur.*

Matriks $\widetilde{A}$ dan $\widetilde{B} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n}$ dikatakan *sama* jika $\widetilde{A}_{ij} = \widetilde{B}_{ij}$ untuk setiap $i$dan j.

Operasi $\tilde{\oplus}$ dan $\tilde{\oplus}$ pada $\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\widetilde{\varepsilon}}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks bilangan kaburpada $\mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n}$.

i) Diketahui $\widetilde{\lambda} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\widetilde{\varepsilon}}$, $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times n}$.

   Didefinisikan $\widetilde{\lambda}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{A}$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:

   $(\widetilde{\lambda}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{A})_{ij} = \widetilde{\lambda}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{A}_{ij}$ untuk i = 1, 2, ..., $m$dan$j$ =1, 2, ..., n

   dan $\widetilde{A}\ \widetilde{\oplus}\ \widetilde{B}$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:

   $(\widetilde{A}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{B})_{ij} = \widetilde{A}_{i}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{B}_{ij}$ untuk i = 1, 2, ..., m dan j =1, 2, ..., n.

ii) Diketahui $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\varepsilon}^{m\times p}$, $\widetilde{B} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^+)_{\varepsilon}^{p\times n}$.

   Didefinisikan $\widetilde{A}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{B}$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:

   $(\widetilde{A}\ \tilde{\oplus}\ \widetilde{B})_{ij} = \overset{p}{\underset{k=1}{\tilde{\oplus}}} \tilde{A}_{ik} \otimes \tilde{B}_{kj}$ untuk$i$ = 1, 2, ..., $m$dan$j$ =1, 2, ..., n

Definisi 3. Untuk setiap $\widetilde{A} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$ dan $\alpha \in$ [0, 1], didefinisikan *matriks potongan-*α *dari* $\widetilde{A}$, yaitu matriks interval A^{α} = (A_{ij}^{α}) $\in \mathbf{I}(\mathrm{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$, *dengan* $A_{ij}^{\alpha} \in \mathbf{I}(\mathrm{R}^{+})_{\varepsilon}$. Matriks $\underline{A}^{\alpha}$ = ($\underline{A}_{ij}^{\alpha}$) $\in \mathrm{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$ dan $\overline{A}^{\alpha}$ = ($\overline{A}_{ij}^{\alpha}$) $\in \mathrm{R}_{\varepsilon}^{+m\times n}$ berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* matriksA^{α}.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa matriks $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{F}(\mathrm{R}^{+})_{\varepsilon}^{m\times n}$ adalah*sama*jika dan hanya jika$A^{\alpha} = B^{\alpha}$ untuk setiap $\alpha \in$ [0, 1], yaitu A_{ij}^{α} = B_{ij}^{α} untuk setiap *i* dan *j*.

Dapat ditunjukkan bahwa $A^{\alpha} \approx [\,\underline{A}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha}\,]$. Demikian juga operasi-operasi matriks bilangan kaburyang didefinisikan di atas dapat dituliskan dalam potongan-α-nya dan interval matriks yang bersesuaian berikut, yaitu bahwa

$\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{A}$ adalah matriks bilangan kaburdengan matriks potongan-α-nya:

$(\lambda \otimes A)^{\alpha} \approx [\,\underline{\lambda}^{\alpha} \otimes \underline{A}^{\alpha}, \overline{\lambda}^{\alpha} \otimes \overline{A}^{\alpha}\,]$ untuk setiap $\alpha \in$ [0, 1],

$\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{B}$ adalah matriks bilangan kaburdengan matriks potongan-α-nya:

$(A \oplus B)^{\alpha} \approx [\,\underline{A}^{\alpha} \oplus \underline{B}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha} \oplus \overline{B}^{\alpha}\,]$ untuk setiap $\alpha \in$ [0, 1] dan

$\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{B}$ adalah matriks bilangan kaburdengan matriks potongan-α-nya:

$(A \otimes B)^{\alpha} \approx [\,\underline{A}^{\alpha} \otimes \underline{B}^{\alpha}, \overline{A}^{\alpha} \otimes \overline{B}^{\alpha}\,]$ untuk setiap $\alpha \in$ [0, 1].

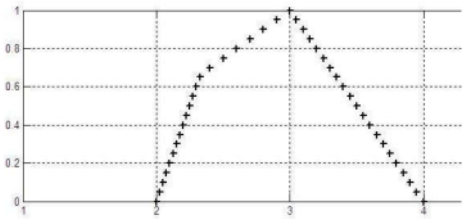
Contoh 3. $\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} (1,3,4) & (1,2,3) \\ (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) & (-3,-1,1) \end{bmatrix}$ dan $\tilde{B}$ = $\begin{bmatrix} (2,2.5,3) & (-5,-4,-2) \\ (1,2,4) & (-1,0,1) \end{bmatrix}$.

Akan ditentukan *i)* $\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{B}$ dan *ii)* $\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{B}$.

i) $\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{B}$ =

$\begin{bmatrix} (1,3,4) & (1,2,3) \\ (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) & (-3,-1,1) \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} (2,2.5,3) & (-5,-4,-2) \\ (1,2,4) & (-1,0,1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \tilde{c} & (1,2,3) \\ (1,2,4) & (-1,0,1) \end{bmatrix}$, dengan grafik batas-batas potongan-α dari $\widetilde{c}$ untuk α = 0, 0.05, 0.1, ..., 1, yang diperoleh dengan program *MATLAB* seperti pada Gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2. Grafik Batas-Batas Potongan-α BKS (1, 3, 4) $\tilde{\otimes}$ BKS (2, 2.5, 3)

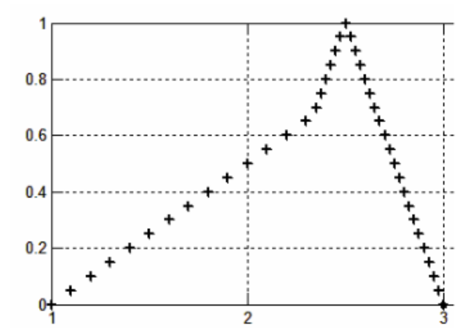
Dengan memperhatikan gambar di atas dan bahwa titik potong dari $\frac{x-2}{0,5}$ dan $\frac{x-1}{2}$ adalah (7/3 , 2/3)

diperoleh $\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ \dfrac{x-2}{0,5} & , 2 \le x \le 7/3 \\ \dfrac{x-1}{2} & , 7/3 < x \le 3 \\ 4-x & , 3 < x \le 4 \\ 0 & , x > 4 \end{cases}$.

ii) $\tilde{\lambda} \mathbin{\tilde{\otimes}} \tilde{B}$ =

$\begin{bmatrix} (1,3,4) & (1,2,3) \\ (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) & (-3,-1,1) \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} (2,2.5,3) & (-5,-4,-2) \\ (1,2,4) & (-1,0,1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \tilde{c} & (-5,-4,-2) \\ (1,2,4) & (-3,-1,1) \end{bmatrix}$, dengan grafik batas-batas potongan-α dari $\widetilde{c}$ untuk α = 0, 0.05, 0.1, ..., 1, yang diperoleh dengan program *MATLAB*, seperti pada Gambar 3 di bawah ini.



Gambar 3 Grafik Batas-Batas Potongan-α BKS (1, 3, 4) $\tilde{\otimes}$ BKS (2, 2.5, 3)

Dengan memperhatikan gambar di atas dan bahwa titik potong dari $\frac{x-2}{0,5}$ dan $\frac{x-1}{2}$ adalah (7/3 , 2/3) diperoleh $\mu_{\tilde{c}}(x)$ =

$$\begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & , 1 \le x \le 7/3 \\ \frac{x-2}{0,5} & , 7/3 < x \le 2,5 \\ 6-2x & , 2,5 < x \le 3 \\ 0 & , x > 3 \end{cases}.$$

Daftar Pustaka

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.

Gondran, M and Minoux, M. 2008. Graph, Dioids and Semirings. New York: Springer.

Lee, K.H. 2005. First Course on Fuzzy Theory and Applications. Berlin: Spinger-Verlag.

Litvinov, G.L., Sobolevskii, A.N. 2001. Idempotent Interval Anaysis and Optimization Problems.Reliab. Comput., 7, 353 – 377; arXiv: math.SC/ 010180.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2008. Aljabar Max-Plus Bilangan Fuzzy. Berkala Ilmiah MIPA Majalah Ilmiah Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam. Vol. 18 (2): pp. 153-164.

Rudhito, Andy. 2011.. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur. Disertasi: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy. 2013.Aljabar Max-Min Interval. Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA. Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 18 Mei 2013. pp. M-97 – M-102.

Rudhito, Andy. 2013.Matriks Atas Aljabar Max-Min Interval.Prosiding Seminar Sains dan Pendidikan Sains VIII. FSM UKSW Salatiga 15 Juni 2013. ISSN : 2087 - 0922. pp: 130 – 136.

Susilo, F. 2006. Himpunan dan Logika Fuzzy serta Aplikasinya Edisi kedua. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Aljabar Max-Min Bilangan Kabur dan Matriks

ORIGINALITY REPORT

17%	7%	15%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

MATCHED SOURCE

1	T. ITOH. "Improved Lower Bounds for Competitive Ratio of Multi-Queue Switches in QoS Networks", IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences, 05/01/2005 Publication	10%

10%

★ T. ITOH. "Improved Lower Bounds for Competitive Ratio of Multi-Queue Switches in QoS Networks", IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences, 05/01/2005

Publication

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 5 words
Exclude bibliography	On		