ISSN:1979-911X

IST AKPRIND
Institut Sains & Teknologi AKPRIND Yogyakarta
Guiding You to a Bright Future

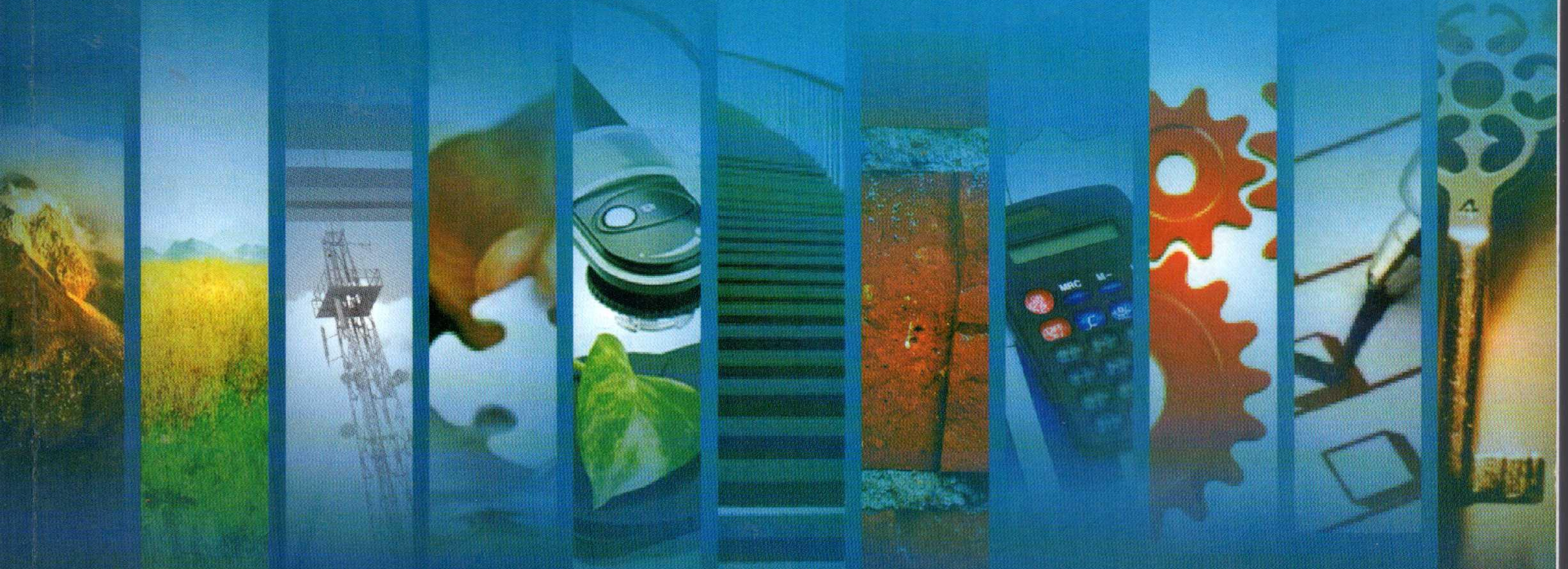
SNAST '10

PERTAMINA
Always There

Prosiding

SEMINAR NASIONAL
APLIKASI SAINS & TEKNOLOGI

**Aplikasi Sains & Teknologi
Dalam Pengelolaan Sumber Daya Alam
Untuk Meningkatkan Daya Saing Nasional**



Auditorium IST AKPRIND
11 Desember 2010

www.akprind.ac.id

ORGANISASI

Pelindung	Rektor Institut Sains & Teknologi AKPRIND Yogyakarta
Penasehat	Pembantu Rektor I Pembantu Rektor II
Penanggung Jawab	Ir. Dwi Indah Purnamawati, M.Si
Ketua Umum	Dr. Sri Mulyaningsih, S.T, M.T
Komite Pelaksana	Edhy Sutanta, S.T, M.Kom Dra. Harmastuti, M. Kom Safriyudin, S.T, M.T Emy Setyaningsih, S.Si,M.Kom Arie Noor Rakhman, S.T, M.T Rr. Yuliana Rahmawati, ST, MT Dra. Nuniek Herawati, M.Kom Uning Lestari, ST, M.Kom Ir. Toto Rusyanto, M.T Ir. Muhammad Suyanto, M.T Imam Sodikin, S.T, M.T Ir.Inti Widi Prasetyanto Ganjar andaka, Ph.D Ir. Risma A. Simanjuntak, MT Ir. Saiful Huda, M.T Ir. Gatot Santosa, M.T Muhammad Sholeh, S.T, M.T Drs, Yudi Setyawan M.S, M.Si Ir. Miftahussalam, MT Bambang Kusmartono, ST, MT M. Andang Novianta, S.T, M.T Ir. Hari Wibowo, MT Sigit Priyambodo, ST, MT Samuel Kristiyana, ST, MT Retno Isnewayanti, S.I.P Sigit Hernowo, SE Ir. Adi Purwanto, M.T C. Indri Parwati, S.T,M.T Hadi Prasetyo Suseno, ST, M.Si Jarot Wijayanto, SY, M.Eng Ir. H. Siwi Sanyoto, MT Dra, Arifah Budhayati M Feriyanto Mohi, S.Kom Erma Susanti, S.Kom Arham Arifudin, S.Kom Rochmad Haryanto, S.Kom

Sekretariat:
Fakultas Teknologi Mineral, IST AKPRIND Yogyakarta
Jl. Kalisahak No. 28 Kompleks Balapan Yogyakarta
Telp. 0274 563029, Fax. 0274 563827
Website: www.snast.akprind.ac.id
Email : snast@akprind.ac.id

DAFTAR ISI

BIDANG TEKNIK LINGKUNGAN

BIDANG MATEMATIKA

BIDANG TEKNIK INDUSTRI

BIDANG UMUM

PENENTUAN HARGA OPSI TIPE EROPA YANG ASET DASARNYA MENGIKUTI PROSES GARCH

Chatarina Enny Murwaningtyas
Staf Pengajar Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta,
E-mail: enny@usd.ac.id

INTISARI

Model *autoregresif conditional heteroskedastic* (ARCH) pertama kali diperkenalkan oleh Engle pada tahun 1982 dengan mengenalkan konsep *conditional heteroscedastic*, sebuah konsep tentang ketidakkonstanan variansi dari data random. Dan perubahan variansi ini dipengaruhi oleh data random sebelumnya yang tersusun dalam urutan waktu. Sedangkan Bollerslev (1986) mengembangkan lebih lanjut model ARCH menjadi model *generalized autoregresif conditional heteroskedastic* (GARCH). Dalam model GARCH, perubahan variansinya, selain dipengaruhi oleh beberapa data random sebelumnya, juga dipengaruhi oleh sejumlah variansi dari data random sebelumnya. Dengan menggunakan model GARCH kita dapat meprediksikan harga saham menggunakan data historisnya. Dan jika harga saham dapat diprediksi kita juga dapat memprediksi harga opsi, khususnya opsi tipe Eropa. Opsi tipe Eropa merupakan suatu kontrak antara dua pihak dimana salah satu pihak (pembeli) memiliki hak, bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual dari pihak lain (penjual), suatu saham tertentu, dengan harga yang telah ditentukan/disepakati pada akhir periode waktu yang juga telah ditentukan. Makalah ini membahas model penentuan harga opsi tipe Eropa menggunakan GARCH.

Kata kunci: *GARCH,* opsi tipe Eropa

PENDAHULUAN

Opsi sungguh popular dan mendunia di tengah kegiatan pasar ekonomi dalam beberapa dekade ini. Tidak hanya di bursa-bursa besar seperti *European Options Exchange* di Amsterdam dan di *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), tetapi di bursa kecil seperti di Sydney pun telah memperdagangkan opsi. Di kawasan Asia Tenggara seperti Singapura, Malaysia, dan Filipina tidak mau ketinggalan memperdagangkan opsi di bursa resmi yang terorganisir. Di Indonesia, perdagangan opsi baru disimulasikan di Bursa Efek Jakarta pada paro kedua tahun 2003 dan dibuka secara resmi sejak 6 Oktober 2004. Walaupun opsi mampu memberikan keuntungan yang besar, namun para investor sangat perlu berhati-hati dalam melakukan kegiatan pasar dengan opsi, karena selain opsi itu sangat kompleks, opsi juga mengandung resiko mengalami kerugian yang disebabkan kerandoman yang ditimbulkan dari perubahan harga saham (jika aset dasar dari opsi adalah saham) yang tidak menentu.

Secara sederhana dapat dijelaskan bahwa opsi merupakan suatu kontrak antara dua pihak dimana salah satu pihak (pembeli) memiliki hak, bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual dari pihak lain (penjual), suatu sekuritas (jaminan) atau aset tertentu seperti halnya saham, dengan harga yang telah ditentukan/disepakati (*strike price*) dalam periode waktu yang juga telah ditentukan (*exercise time*). Jika aset yang melandasinya adalah saham, maka opsi tersebut diistilahkan opsi saham. Dalam hal opsi, aset yang melandasinya tidak hanya saham, tetapi ada juga indeks saham, nilai mata uang, obligasi, dan lain-lain. Pemegang opsi mempunyai hak yang penuh untuk memutuskan menjalankan opsi tersebut atau tidak. Jika opsi tersebut menguntungkan, maka opsi tersebut dijalankan, tetapi sebaliknya jika opsi tersebut tidak menguntungkan, maka pemegang opsi boleh tidak menggunakan haknya. Apabila pada saat jatuh tempo pemegang opsi tidak menggunakan haknya, maka hak tersebut akan hilang dengan sendirinya. Dengan demikian opsi yang dimilikinya tidak mempunyai nilai lagi atau nilainya nol.

Opsi dibedakan menurut jenisnya, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah hak untuk membeli suatu sekuritas, sedangkan opsi *put* adalah hak untuk menjual suatu sekuritas. Opsi juga dibedakan atas waktu pembayaran (waktu dimana opsi tersebut dijalankan). Ada dua tipe opsi menurut waktu pembayaran, yaitu opsi tipe Amerika dan opsi tipe Eropa. Opsi tipe Amerika adalah opsi yang dapat dilaksanakan kapan saja antara tanggal pembelian sampai masa jatuh temponya (sampai usia opsi tersebut berakhir). Sedangkan opsi tipe Eropa adalah opsi yang hanya dapat dilaksanakan pada masa jatuh tempo opsi tersebut.

Black dan Scholes (1973) memperkenalkan sebuah formula penentuan harga opsi dalam bentuk persamaan diferensial, yang dikenal sebagai formula harga opsi Black-Scholes, yang dapat membantu para investor saham menentukan apakah harga opsi terlalu mahal atau sebaliknya terlalu murah relatif terhadap harga saham pada saat itu. Formula Black-Scholes tersebut sangat praktis, karena variabel-variabel input yang dibutuhkan tersedia secara umum. Selain formula yang diperkenalkan oleh Black dan Scholes, pada waktu hampir bersamaan, Merton (1973) bekerja secara terpisah menemukan formula yang sama.

Dalam bebarapa penelitian yang beberbeda telah dibahas model runtun waktu untuk *return* saham yaitu model yang berdasarkan heterokedastic. Model autoregresif conditional heteroskedastic (ARCH) pertama kali diperkenalkan oleh Engle pada tahun 1982 dengan mengenalkan konsep Conditional Heteroscedastic, sebuah konsep tentang ketidak-konstanan variansi dari data random. Dan perubahan variansi ini dipengaruhi oleh data random sebelumnya yang tersusun dalam urutan waktu. Sedangkan Bollerslev (1986) mengembangkan lebih lanjut model ARCH menjadi model generalized autoregresif conditional heteroskedastic (GARCH). Dalam model GARCH, perubahan variansinya, selain dipengaruhi oleh beberapa data random sebelumnya, juga dipengaruhi oleh sejumlah variansi dari data random sebelumnya. Model yang ditawarkan melalui GARCH terkesan lebih masuk akal untuk memodelkan urutan waktu data random dengan tingkat volatilitas yang tinggi. Makalah ini akan membahas penentuan harga opsi menggunakan model runtun waktu GARCH.

PEMBAHASAN

Model Harga Saham

Peningkatan harga saham dibangun dengan menggunakan proses *Brownian motion* standar. Misalkan (Ω, $\mathcal{F}$, **P**) adalah basis stokastik, dengan Ω himpunan semesta, $\mathcal{F}$ adalah σ-*field*, **P** adalah ukuran pada (Ω, $\mathcal{F}$), dan $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ adalah *filtration*. Proses $\{B_t\}_{t\geq 0}$ adalah proses *Brownian motion* berkenaan dengan ukuran **P**. Misalkan $\sigma > 0$ adalah koefisien *volatility* (fluktuasi harga saham/deviasi standar *return* saham), dan $\mu \in \mathbb{R}$ adalah *appreciation rate*(ekspektasi *return* saham). Peningkatan dari harga saham S ditentukan dengan proses random sebagai berikut :

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t) \tag{1}$$

Jika persamaan (1) dicari penyelesaiannya maka diperoleh

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right\} \tag{2}$$

Proses random yang didefinisikan seperti pada Persamaan (2) pertama kali dibicarakan oleh Samuelson (1965) dan selanjutnya proses random tersebut dinamakan *geometric (economic) Brownian motion.* Jika akan diperhatikan harga saham pada saat $t-1$ maka persamaan (2) akan menjadi

$$S_{t-1} = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-1) + \sigma B_{t-1}\right\} \tag{3}$$

Dan persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk

$$S_0 = S_{t-1} \exp\left\{-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-1) - \sigma B_{t-1}\right\} \tag{4}$$

Jika persamaan (4) disubtitusikan ke persamaan (2) maka diperoleh

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} \exp\left\{-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-1) - \sigma B_{t-1}\right\} \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right\} \\ &= S_{t-1} \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(B_t - B_{t-1})\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Karena $\{B_t\}_{t\geq 0}$ adalah proses *Brownian motion* berkenaan dengan ukuran **P**, maka

$$B_t - B_{t-1} \sim B \sim N(0,1)$$

Misalkan $\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_t \sim N(0, \sigma^2)$ dengan ε_t terukur-$\mathcal{F}_t$, maka harga saham satu periode berikutnya adalah

$$S_t = S_{t-1} \exp\left\{\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \varepsilon_t\right\} \tag{6}$$

Jika dimisalkan $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ dengan r adalah koefisien bebas resiko, sehingga persamaan (6) menjadi

$$S_t = S_{t-1} \exp\left\{r - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda\sigma + \varepsilon_t\right\} \tag{7}$$

Karena variansi dalam model GARCH tidak konstan dan bergantung pada waktu, maka persamaan (7) tersebut dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{\sigma_t^2}{2} + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t \tag{8}$$

dengan ε_t memiliki rata-rata nol dan variansi bersyaratnya σ_t^2 terhadap ukuran probabilitas P, r adalah koefisien bebas resiko, dan λ adalah konstanta unit resiko premi. Persamaan (8) ini disebut model *return* saham. Berdasarkan asumsi lognormal maka nilai harapan dari *return* adalah $\exp(r-\sigma_t^2/2+\lambda\sigma_t)$ dan variansinya adalah σ_t^2.

Asumsi lebih jauh dalam model *return* saham ini adalah ε_t mengikuti model GARCH dari Bollerslev (1986) terhadap ukuran P, yaitu

$$\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \tag{9}$$

dengan $\mathcal{F}_t$ adalah himpunan informasi pada waktu t, $p > 0$, $q > 0$, $\alpha_i \geq 0$ dan $\beta_i \geq 0$.

Hubungan Nilai Resiko Netral Lokal

Nilai resiko netral konvensional tidak mengakomodasi heteroskedastisitas dari *return* saham. Hubungan nilai resiko netral lokal (local risk-neutral valuation relationship/LRNVR) adalah bentuk umum dari nilai risiko netral yang mengakomodasi heteroskedastisitas.

Definisi 1

Suatu nilai ukuran Q dikatakan memenuhi hubungan nilai resiko netral lokal jika ukuran Q saling kontinu mutlak berkenaan dengan ukuran P, $S_t/S_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}$ berdistribusi log normal (dengan ukuran Q),

$$E^Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = e^r \tag{10}$$

$$Var^Q\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = Var^P\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) \tag{11}$$

hampir pasti yang berkenaan dengan ukuran P.

Misalkan suatu proses Y_t sedemikian hingga $Y_t|\mathcal{F}_t$ berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran-P. Didefinisikan Q dengan $dQ = \exp\left((r-\rho)T + \sum_{t=1}^{T} Y_t\right)dP$. Hal ini berakibat bahwa Q adalah ukuran dan saling kontinu mutlak berkenaan dengan ukuran P.

Teorema 1

Jika $S_{t-1} = E^P(S_t \exp(-\rho + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1})$, maka
1) Q adalah ukuran probabilitas
2) untuk variabel random W_t terukur-$\mathcal{F}_t$ maka $E^Q[W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E^P[W_t \exp((r-\rho)+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$.

Bukti :

Karena diketahui $dQ = \exp((r-\rho)T + \sum_{t=1}^{T} Y_t)dP$ maka

$$\int 1dQ = \int \exp\left((r-\rho)T + \sum_{t=1}^{T} Y_t\right)dP$$

$$= E^P\left(\exp\left((r-\rho)T + \sum_{t=1}^{T} Y_t\right)|\mathcal{F}_0\right)$$

$$= E^P\left[\exp\left((r-\rho)(T-1) + \sum_{t=1}^{T-1} Y_t\right)\exp\left((r-\rho)+Y_T\right)|\mathcal{F}_0\right]$$

$$= E^P\left[\exp\left((r-\rho)(T-1) + \sum_{t=1}^{T-1} Y_t\right)e^r E^P[\exp(-\rho+Y_T)|\mathcal{F}_{T-1}]|\mathcal{F}_0\right]$$

Diketahui bahwa $S_{t-1} = E^P(S_t \exp(-\rho+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1})$ berarti $E^P(\exp(-\rho+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}) = e^{-r}$ dengan r adalah koefisien bebas resiko. Sehingga diperoleh

$$\int 1dQ = E^P\left[\exp\left((r-\rho)(T-1) + \sum_{t=1}^{T-1} Y_t\right)|\mathcal{F}_0\right]$$

ISSN: 1979-911X

Jika proses itu dilanjutkan maka akan diperoleh $\int 1dQ = 1$, berarti terbukti Q adalah ukuran probabilitas. Untuk pembuktian bagian selanjunya dapat dibuktikan menggunakan Teorema Radon-Nikodym, yang berakibat $e^{(r-\rho)T+\sum_{t=1}^{T} Y_t}$ merupakan P-as dan untuk W_t suatu variabel random terukur- $\mathcal{F}_t$, memenuhi $E^Q[W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E^P[W_t \exp((r-\rho)+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$.

Teorema 2

Jika $S_{t-1} = E^P(S_t \exp(-\rho + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1})$, maka

1) $S_t/S_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}$ berdistribusi log normal dengan ukuran Q.
2) $E^P(S_t/S_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) = e^r$
3) $Var^Q\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right) = Var^P\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)$ hampir pasti yang berkenaan dengan ukuran P.

Bukti :

Untuk membuktikan bagian 2) digunakan Teorema 1, diperoleh

$$E^Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right) = E^P\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\exp((r-\rho)+Y_t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)$$
$$= \frac{e^r}{S_{t-1}} E^P(S_t \exp(-\rho + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}) = e^r$$

Selanjutnya akan dibuktikan bagian 1) dan 3). Pada Teorema 1 bagian ke 2), telah dibuktikan

$$E^Q[W_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E^P[W_t \exp((r-\rho)+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$

Untuk W_t suatu variabel random terukur-$\mathcal{F}_t$. Jika W_t terukur- $\mathcal{F}_t$, jadi W_t^c dengan c ∈ ℝ juga terukur- $\mathcal{F}_t$ dan berlaku juga persamaan diatas. Jadi

$$E^Q[W_t^c|\mathcal{F}_{t-1}] = E^P[W_t^c \exp((r-\rho)+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$

Maka berlaku juga

$$E^Q\left[\frac{S_t^c}{S_{t-1}^c}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] = E^P\left[\frac{S_t^c}{S_{t-1}^c}\exp((r-\rho)+Y_t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$$
$$E^Q\left[\exp\left(c\cdot\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] = E^P\left[\exp\left(c\cdot\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right)\exp((r-\rho)+Y_t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$$

Jika $X_t = \ln\left(\frac{S_t^c}{S_{t-1}^c}\right)$, maka diperoleh

$$E^Q[\exp(cX_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = E^P[\exp(cX_t)\exp((r-\rho)+Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$

Sedangkan berdasarkan penjelasan sebelumnya diketahui bahwa $X_t|\mathcal{F}_t$ berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran-P. Misalkan rata-rata dan variansi dari $X_t|\mathcal{F}_t$ terhadap ukuran-P adalah μ_t dan σ_t^2, dan $Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$ dengan U_t adalah variabel random yang lain dengan rata-rata 0. Maka

$$\begin{aligned} E^Q[\exp(cX_t)|\mathcal{F}_{t-1}] &= E^P[\exp(cX_t + (r-\rho) + Y_t)|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E^P[\exp(cX_t + (r-\rho) + \alpha + \beta X_t + U_t)|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \exp(r-\rho+\alpha)E^P[\exp((c+\beta)X_t + U_t)|\mathcal{F}_{t-1}] \end{aligned} \tag{12}$$

Nilai harapan dan variansi gabungan dari (c + β) X_t dan U_t dengan ukuran P adalah

$$E[(c+\beta)X_t + U_t] = \mu_t(c+\beta)$$
$$var[(c+\beta)X_t + U_t] = (c+\beta)^2\sigma_t^2 + E^P[U_t^2]$$

Menggunakan fungsi pembangkit moment maka diperoleh

$$E^P[\exp((c+\beta)X_t + U_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \exp(\mu_t(c+\beta) + \tfrac{1}{2}((c+\beta)^2\sigma_t^2 + E^P[U_t^2]))$$
$$E^P[\exp((c+\beta)X_t + U_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \exp(\mu_t(c+\beta) + \tfrac{1}{2}(c^2 + 2c\beta + \beta^2)\sigma_t^2 + \tfrac{1}{2}E^P[U_t^2])$$
$$= \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\sigma_t^2 + \mu_t\beta + \tfrac{1}{2}E^P[U_t^2] + \tfrac{1}{2}c^2\sigma_t^2 + c(\mu_t + \beta\sigma_t^2)\right)$$

Jadi persamaan (12) menjadi

$$\begin{aligned} E^Q[\exp(cX_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \exp(r-\rho+\alpha+ \tfrac{1}{2}\beta^2\sigma_t^2 + \mu_t\beta + \tfrac{1}{2}E^P[U_t^2]) \times \\ \exp\left(\tfrac{1}{2}c^2\sigma_t^2 + c(\mu_t + \beta\sigma_t^2)\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Jika c = 0 maka persamaan (13) menjadi

 ISSN: 1979-911X

$$E^Q[1|\mathcal{F}_{t-1}] = 1 = \exp\left(r - \rho + \alpha + \tfrac{1}{2}\beta^2\sigma_t^2 + \mu_t\beta + \tfrac{1}{2}E^P[U_t^2]\right) \quad (14)$$

Bila Persamaan (14) disubtitusikan ke Perasamaan (13), maka diperoleh

$$E^Q[\exp(cX_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \exp\left(\frac{1}{2}c^2\sigma_t^2 + c(\mu_t + \beta\sigma_t^2)\right) \quad (15)$$

Sehingga jika c = 1 maka persamaan (15) menjadi

$$E^Q[\exp(X_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_t^2 + (\mu_t + \beta\sigma_t^2)\right)$$

Dengan kata lain persamaan diatas adalah fungsi pembangkit moment dari X_t, jadi

$$X_t = \ln\left(\frac{S_t^c}{S_{t-1}^c}\right)\Big|\mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu_t + \beta\sigma_t^2, \sigma_t^2) \text{ terhadap ukuran } Q$$

Jadi terbukti bagian 1. Sebelumnya telah dikatakan rata-rata dan variansi dari $X_t|\mathcal{F}_t$ terhadap ukuran-***P*** adalah μ_t dan σ_t^2, jadi terbukti bahwa bagian 3 dipenuhi juga.

Teorema 3

Agen ekonomi akan memaksimalkan utilitas yang diharapkan dan fungsi utilitas pada waktu terpisah dan aditif, maka LRNVR memenuhi tiga kondisi berikut :

1) Jika penghindar resiko relatif dari fungsi utilitas bernilai konstan maka logaritma dari jumlahan konsumsi berdistribusi normal dengan mean dan variansi konstan terhadap ukuran *P*.
2) Jika penghindar resiko absolut dari fungsi utilitas bernilai konstan maka logaritma dari jumlahan konsumsi berdistribusi normal dengan mean dan variansi konstan terhadap ukuran *P*.
3) Jika fungsi utilitas adalah linier, maka logaritma dari jumlahan konsumsi berdistribusi normal dengan mean dan variansi konstan terhadap ukuran *P*.

Bukti :

1) Karena penghindar resiko relatif dari fungsi utilitas bernilai konstan maka memenuhi

$$\lambda_1 = -\frac{\ln(U'(C_t)) - \ln(U'(C_{t-1}))}{\ln(C_t) - \ln(C_{t-1})}$$

Sehingga diperoleh

$$\ln(U'(C_t)) - \ln(U'(C_{t-1})) = (-\lambda_1)(\ln(C_t) - \ln(C_{t-1}))$$

$$\ln\left(\frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})}\right) = (-\lambda_1)\ln\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right)$$

Karena telah diasumsikan $\ln(C_t/C_{t-1})$ berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran *P*, maka $\ln(U'(C_t)/U'(C_{t-1}))$ juga berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran *P*.

2) Karena penghindar resiko absolut dari fungsi utilitas bernilai konstan maka memenuhi

$$\lambda_2 = -\frac{\ln(U'(C_t)) - \ln(U'(C_{t-1}))}{C_t - C_{t-1}}$$

Sehingga diperoleh

$$\ln(U'(C_t)) - \ln(U'(C_{t-1})) = (-\lambda_2)(C_t - C_{t-1})$$

$$\ln\left(\frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})}\right) = (-\lambda_2)(C_t - C_{t-1})$$

Karena telah diasumsikan $C_t - C_{t-1}$ berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran *P*, maka $\ln(U'(C_t)/U'(C_{t-1}))$ juga berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran *P*.

3) Karena fungsi utilitas adalah linier, sehingga

$$U(C_t) = a\,C_t + c$$

Maka

$$U'(C_t) = a \text{ dan } \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} = 1$$

Jadi rasio marginal utilitas

$$\ln\left(\frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})}\right) = 0 \sim N(0,0)$$

Jadi dapat disimpulkan dalam ketiga kondisi diatas, jelas bahwa $\ln(U'(C_t)/U'(C_{t-1}))$ berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi konstan terhadap ukuran P.

Model Harga Opsi Garch
Pada bagian ini akan dibahas mengenai harga opsi GARCH dengan hubungan nilai resiko netral lokal dipenuhi.

Teorema 4
LRNVR berakibat bahwa, terhadap ukuran Q,

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)=r-\frac{\sigma_t^2}{2}+\lambda\sigma_t+\xi_t$$

dengan

$$\xi_t \mid \mathcal{F}_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$

dan

$$\sigma_t^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-1}-\lambda\sigma_{t-1})^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2$$

Bukti :
Pada Teorema 2 telah dibuktikan $\ln(S_t/S_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}$ berdistribusi normal terhadap ukuran Q. Misalkan

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)=v_t+\xi_t \tag{16}$$

dengan v_t adalah variabel random yang berdistribusi normal dan memiliki rata-rata 0 dan variansi sama dengan $\ln(S_t/S_{t-1})$. Dengan kata lain akan dibuktikan bahwa

1. $v_t=r-\frac{1}{2}\sigma_t^2$
2. $\sigma_t^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-1}-\lambda\sigma_{t-1})^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2$

Persamaan (16) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{S_t}{S_{t-1}}=\exp(v_t+\xi_t) \tag{17}$$

Bila kedua ruas dicari nilai harapannya terhadap ukuran Q, maka diperoleh

$$E^Q\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\mathcal{F}t\right]=E^Q[\exp(v_t+\xi_t)|\mathcal{F}t]=\exp(v_t)\cdot E^Q[\exp(\xi_t)|\mathcal{F}t]$$

Maka dengan fungsi pembangkit moment untuk variabel random yang berdistribusi normal diperoleh

$$E^Q\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\mathcal{F}t\right]=\exp\left(v_t+\frac{1}{2}Var^Q\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)\cdot E^Q[1|\mathcal{F}t] \tag{18}$$

Menggunakan Teorema 2 bagian ke 3 yang berbunyi, $Var^Q\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)=Var^P\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)=\sigma_t^2$, maka persamaan (18) dapat ditulis sebagai berikut

$$E^Q\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\mathcal{F}t\right]=\exp\left(v_t+\tfrac{1}{2}\sigma_t^2\right) \tag{19}$$

Dilain pihak Teorema 2 bagian 3 berbunyi

$$E^Q\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\middle|\mathcal{F}t\right]=e^r \tag{20}$$

Jika persamaan (20) di subtitusikan ke persamaan (19) maka diperoleh

$$\exp\left(v_t+\tfrac{1}{2}\sigma_t^2\right)=e^r$$

Sehingga terbukti bagian 1 yaitu $v_t+\frac{1}{2}\sigma_t^2=r$ atau $v_t=r-\frac{1}{2}\sigma_t^2$.
Perhatikan kembali model harga saham dengan GARCH yang diyatakan dalam persamaan (8), seperti berikut

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)=r-\frac{\sigma_t^2}{2}+\lambda\sigma_t+\varepsilon_t \tag{21}$$

ISSN: 1979-911X

Sedangkan hasil pembuktian pada bagian 1 diatas menghasilkan

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t \tag{22}$$

Dan menggunakan kembali bagian 3 dalam Teorema 3, seperti berikut

$$Var^Q\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right) = Var^P\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)$$

Jika persamaan (21) dan (22) saling disubtitusikan, maka dihasilkan persamaan berikut

$$r - \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t = r - \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t$$

Maka

$$\varepsilon_t = \xi_t - \lambda\sigma_t \tag{23}$$

Jika persamaan (23) disubtitusikan ke persamaan (9) maka diperoleh

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_t - \lambda\sigma_t)^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\sigma_{t-i}^2$$

Jadi terbukti bagian 2.

Teorema 5
Teorema 4 mengakibatkan

$$S_T = S_t \exp\left((T-t)\cdot r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_s + \sum_{s=t+1}^{T}\xi_s\right)$$

terhadap ukuran Q.
Bukti :
Menggunakan Teorema 4 diperoleh $\ln(S_t/S_{t-1}) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t$, untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ terhadap ukuran Q maka

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \sum_{s=t+1}^{T}\ln\left(\frac{S_s}{S_{s-1}}\right) = \sum_{s=t+1}^{T}\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_s^2 + \xi_s\right) = \sum_{s=t+1}^{T} r - \sum_{s=t+1}^{T}\tfrac{1}{2}\sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^{T}\xi_s$$

$$= (T-t)\cdot r - \sum_{s=t+1}^{T}\tfrac{1}{2}\sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^{T}\xi_s$$

Sehingga

$$S_T = S_t \exp\left((T-t)\cdot r - \frac{1}{2}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_s + \sum_{s=t+1}^{T}\xi_s\right)$$

Dengan kata lain terbukti teorema diatas.

Teorema 6
Proses diskonto $e^{-rt}S_t$ adalah martingale terhadap ukuran Q.
Bukti :
Bila Teorema 5 sedikit dimodifikasi maka diperoleh

$$S_t = S_{t-1}\exp\left(r - \frac{1}{2}\sigma_t + \xi_t\right) \tag{24}$$

Sehingga nilai harapan bersyarat dari $e^{-rt}S_t$ adalah

$$E^Q[\exp(-rt)S_t|\mathcal{F}_{t-1}] = E^Q[\exp(-rt)S_{t-1}\exp(r - \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$
$$= S_{t-1}\exp(-r(t-1))E^Q[\exp(-\tfrac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t)|\mathcal{F}_{t-1}]$$

Karena $\xi_t \mid \mathcal{F}_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ terhadap ukuran Q, dan menggunakan fungsi pembangkit moment $E^Q[\exp(\xi_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \exp(\frac{1}{2}\sigma_t^2)$, maka diperoleh

$$E^Q[\exp(-rt)S_t|\mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}\exp(-r(t-1))$$

Jadi dengan kata lain terbukti $e^{-rt}S_t$ adalah martingale terhadap ukuran Q.

Sehingga dengan menggunakan Teorema 6, dapat ditentukan harga opsi *call* tipe Eropa dengan harga kontrak sebesar K dan waktu jatuh tempo T dapat ditentukan dengan rumus

$$C = \exp(-rT)E^Q\left[\max(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_0\right] \tag{25}$$

KESIMPULAN

Dalam makalah ini talah dibahas tentang tinjauan analitis dari model penentuan harga opsi dengan menggunakan model GARCH. Bila kita dapat menyusun model GARCH menggunakan data historinya maka tentu saja kita dapat menduga harga opsinya. Dan harga opsinya dapat dihitung menggunakan persamaan (25). Sedangkan persamaan (25) berdasarkan model harga saham yang digambarkan dalam persamaan (8).

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G., 1995, '*THE ELEMENTS OF INTEGRATION AND LEBESGUE MEASURE*', JOHN WILEY & SONS, NEW YORK.

Black, F. dan Scholes, M., 1973, 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *Journal of Political Economy*, 81, 637—654.

Bollerslev, T., 1986, 'Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity', *Journal of Econometrics*, 31, 307—327.

Duan, J.-C., 1995, 'The GARCH Option Pricing Model', *Mathematical Finance*, 5(1), 13—32.

Engle, R. F., 1982, 'Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of The Variance of United Kingdom Inflation', *Econometrica*, 50(4), 987—1007.

Hull, J. C., 2000, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Inc

Samuelson, P.A, 1965, Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Managemen Review*, 6, 13-31.

Tsay, R.S., 2005, "Analysis of Financial Time Series", John Wiley and Sons, New York.