turnitin

Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author:	Enny Murwaningtyas
Assignment title:	Periksa similarity
Submission title:	REPRESENTASI INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN...
File name:	REPRESENTASI_INTEGRAL_STOKASTIK_UNTUK_GERAK_BROW...
File size:	431.5K
Page count:	10
Word count:	2,549
Character count:	12,262
Submission date:	10-Mar-2023 02:58PM (UTC+0700)
Submission ID:	2033755377

Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika
hal 1025-1034 November 2016
ISBN: 978-602-6122-20-9
http://jurnal.fkip.uns.ac.id

REPRESENTASI INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

Chatarina Enny Murwaningtyas[1,2], Sri Haryatmi[1], Gunardi[1], Herry Pribawanto Suryawan[2]

[1]Universitas Gadjah Mada
[2]Universitas Sanata Dharma
enny@usd.ac.id

Abstrak: Gerak Brown fraksional adalah proses stokastik yang merupakan pengembangan dari gerak Brown standar. Gerak Brown fraksional merupakan bentuk umum dari gerak Brown dengan menambahkan satu parameter Hurst (H). Perumuman ini mengakibatkan beberapa sifat yang ada di dalam gerak Brown sudah tidak berlaku lagi. Pada makalah ini akan dibahas representasi integral stokastik untuk gerak Brown fraksional. Berdasarkan Mandelbrot dan Van Ness (1968) gerak Brown dapat didefinisikan dalam bentuk integral stokastik. Selain memaparkan tentang definisi integral stokastik berdasarkan Mandelbrot dan Van Ness, akan ditujukkan juga memenuhi sifat kovariansi dari proses gerak Brown fraksional.

Kata kunci: Gerak Brown Fraksional, Integral Stokastik

PENDAHULUAN

Pada tahun 1940, gerak Brown fraksional diperkenalkan oleh Kolmogorov untuk yang pertama kali dalam kerangka ruang Hilbert, yang diberi nama Wiener Helix. Selanjutnya pada tahun 1968, Mandelbrot dan Van Ness memperkenalkan proses tersebut dengan nama gerak Brown fraksional (*Fractional Brownian Motion* atau FBM). Dalam makalah Mandelbrot dan Van Ness (1968) telah dibuktikan repersentasi integral stokastik pada proses gerak Brown standar.

Gerak Brown fraksional merupakan teori pengembangan dari teori *Brownian Motion* atau lebih dikenal Gerak Brown. Perumuman dari gerak Brown ini mempunyai banyak sifat menarik yang tidak dimiliki oleh gerak Brown sehingga menjadi model yang lebih realistis untuk banyak aplikasi di berbagai cabang ilmu misalnya matematika keuangan, fisika polimer, hidrologi, jaringan telekomunikasi dan sebagainya. Beberapa sifat menariknya antara lain *self-similarity*, *stationary increment*, *long-range dependent*, kekontinuan Hölder dari lintasan sampel, dan sifat non-Markov.

Pada matamatika keuangan, model gerak Brown geometrik mengasumsikan bahwa *return* saham berdistribusi normal, stasioner dan saling bebas. Pada kenyataannya harga saham cukup banyak yang tidak saling bebas dalam rentang yang pendek (*short memory*) atau dalam rentang yang panjang (*long memory*). Model yang bisa mengatasi hal itu adalah gerak brown fraksional. Gerak brown fraksional pertama kali dikenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968).

REPRESENTASI INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

by Murwaningtyas Enny

Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika *ISBN: 978-602-6122-20-9*
hal 1025-1034 November 2016 *http://jurnal.fkip.uns.ac.id*

REPRESENTASI INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

Chatarina Enny Murwaningtyas[1,2], Sri Haryatmi[1], Gunardi[1], Herry Pribawanto Suryawan[2]

[1]Universitas Gadjah Mada
[2]Universitas Sanata Dharma
enny@usd.ac.id

Abstrak: Gerak Brown fraksional adalah proses stokastik yang merupakan pengembangan dari gerak Brown standar. Gerak Brown fraksional merupakan bentuk umum dari gerak Brown dengan menambahkan satu parameter Hurst (H). Perumuman ini mengakibatkan beberapa sifat yang ada di dalam gerak Brown sudah tidak berlaku lagi. Pada makalah ini akan dibahas representasi integral stokastik untuk gerak Brown fraksional. Berdasarkan Mandelbrot dan Van Ness (1968) gerak Brown dapat didefinisikan dalam bentuk integral stokastik. Selain memaparkan tentang definisi integral stokastik berdasarkan Mandelbrot dan Van Ness, akan ditujukkan juga memenuhi sifat kovariansi dari proses gerak Brown fraksional.

Kata kunci: Gerak Brown Fraksional, Integral Stokastik

PENDAHULUAN

Pada tahun 1940, gerak Brown fraksional diperkenalkan oleh Kolmogorov untuk yang pertama kali dalam kerangka ruang Hilbert, yang diberi nama Wiener Helix. Selanjutnya pada tahun 1968, Mandelbrot dan Van Ness memperkenalkan proses tersebut dengan nama gerak Brown fraksional (*Fractional Brownian Motion* atau FBM). Dalam makalah Mandelbrot dan Van Ness (1968) telah dibuktikan repersentasi integral stokastik pada proses gerak Brown standar.

Gerak Brown fraksional merupakan teori pengembangan dari teori *Brownian Motion* atau lebih dikenal Gerak Brown. Perumuman dari gerak Brown ini mempunyai banyak sifat menarik yang tidak dimiliki oleh gerak Brown sehingga menjadi model yang lebih realistis untuk banyak aplikasi di berbagai cabang ilmu misalnya matematika keuangan, fisika polimer, hidrologi, jaringan telekomunikasi dan sebagainya. Beberapa sifat menariknya antara lain *self-similarity*, *stationary increment*, *long-range dependent*, kekontinuan Hölder dari lintasan sampel, dan sifat non-Markov.

Pada matamatika keuangan, model gerak Brown geometrik mengasumsikan bahwa *return* saham berdistribusi normal, stasioner dan saling bebas. Pada kenyataannya harga saham cukup banyak yang tidak saling bebas dalam rentang yang pendek (*short memory*) atau dalam rentang yang panjang (*long memory*). Model yang bisa mengatasi hal itu adalah gerak brown fraksional. Gerak brown fraksional pertama kali dikenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968).

Dalam perkembangan teori gerak Brown fraksional, terdapat beberapa definisi representatif integral gerak Brown fraksional. Pada tulisan ini akan menggunakan definisi gerak Brown fraksional yang dipresentasikan pertama kali sebagai rata-rata bergerak dari increments Brownian yang diperkenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968).

HASIL DAN PEMBAHASAN

GERAK BROWN FRAKSIONAL

Sebelum membahas definisi gerak Brown fraksional, terlebih dahulu akan dikenalkan notasi yang digunakan yaitu :

$$(x)_+^y = \begin{cases} x^y & \text{jika } x..0 \\ 0 & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Jika H suatu konstanta di dalam interval (0,1), berdasarkan Rostek (2009), gerak Brown fraksional $\{B^{(H)}(t), t \in \mathbb{R}\}$ adalah proses stokastik yang didefinisikan sebagai berikut

$$B^{(H)}(0) = 0 \tag{1}$$

$$B^{(H)}(t) = c_H \left[\int_{\mathbb{R}} \left((t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(s) \right] \tag{2}$$

dengan $\{B^{(H)}(t), t \in \mathbb{R}\}$ adalah gerak Brown standar, H dikatakan sebagai parameter Hurst dan

$$c_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(\frac{1}{2} + H)\Gamma(2 - 2H)}} \tag{3}$$

adalah konstanta normalitas dengan Γ adalah fungsi gamma. Berdasarkan definisi diatas, untuk $t > 0$ maka $B^{(H)}(t)$ dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$B^{(H)}(t) = c_H \left[\int_{-\infty}^{0} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(s) + \int_{0}^{t} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB(s) \right] \tag{4}$$

Dipilih nilai parameter spesial $H = \frac{1}{2}$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
B^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t) &= c_{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}-(-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right)dB(s)+\int_{0}^{t}\left((t-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right)dB(s)\right] \\
&= c_{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0}\left((t-s)^{0}-(-s)^{0}\right)dB(s)+\int_{0}^{t}\left((t-s)^{0}\right)dB(s)\right] \\
&= c_{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0}(1-1)\,dB(s)+\int_{0}^{t}(1)\,dB(s)\right] \\
&= c_{\frac{1}{2}}\int_{0}^{t}dB(s) \\
&= B(t)
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
c_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(2-2\cdot\frac{1}{2})}} \\
&= \sqrt{\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Selanjutnya akan diperlihatkan apakah nilai harapan gerak Brown fraksional sama dengan 0. Berdasarkan definisi gerak Brown pada (2), terlihat bahwa gerak Brown fraksional bergantung dengan gerak Brown standar, sedangkan nilai harapan dari gerak Brown standar adalah 0. Jadi berakibat nilai harapan dari gerak Brown fraksional juga sama dengan 0, atau dapat dituliskan

$$\mathrm{E}[B^{(H)}(t)] = 0 \text{ untuk semua } t \geq 0$$

Dalam beberapa artikel yang membahas tentang gerak Brown fraksional, proses stokastik tidak didefinisikan melalui integral representasi melainkan klasifikasi gerak Brown didasarkan pada sifat kovariasinya yaitu tergambar dalam definisi berikut.

Definisi 1.

Misalkan H suatu konstanta di dalam interval (0,1). Gerak Brown fraksional $(B^{(H)}(t))_{t\geq 0}$ dari indeks Hurst H adalah proses Gaussian terpusat dengan fungsi kovarian

$$\mathrm{E}\left[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right) \tag{5}$$

Sehingga tertarik untuk membuktikan bahwa definisi gerak Brown berdasarkan (2) juga memiliki sifat (5). Untuk pembuktian ini diperlukan Lemma yang akan dibahas di sub bab berikutnya, sehingga bukti ini akan dibahas kemudian.

Gerak Brown fraksional adalah proses *self similar* yang berarti bahwa untuk setiap $\alpha > 0$, variabel random $B^{(H)}(\alpha t)$ mempunyai hukum probabilitas sama dengan $\alpha^H B^{(H)}(t)$. Konstanta H menentukan tanda dari kovarian *increments* gerak Brown fraksional. Jika $H > \frac{1}{2}$ maka kovariannya positif dan jika $H < \frac{1}{2}$ maka kovariannya negatif. Sifat lain dari gerak Brown fraksional adalah jika $H > \frac{1}{2}$ maka prosesnya bersifat*long memory* dan jika $H < \frac{1}{2}$ maka kovariannya prosesnya bersifat *sort memory*. Sifat *self similar* dan *long memory* menjadikan gerak Brown fraksional suatu alat yang sesuai untuk penerapan dalam matematika keuangan. Hal ini disebabkan karena ada harga saham yang memiliki sifat *long memory*.

INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

Ditentukan suatu konstanta Hurst H dengan $\frac{1}{2} < H < 1$. Berdasarkan Biagini, Hu, Øksendal, dan Zhang (2008) didefinisikan

$$\phi(s,t) = H(2H-1)|t-s|^{2H-2} \qquad \text{dengan } s,t \in \square \tag{6}$$

Dan untuk $s,t > 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^s \phi(u,v)\,du\,dv &= \int_0^t\int_0^s H(2H-1)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \\
&= \int_0^t \left(H|u-v|^{2H-1}\Big|_0^s \right) dv \\
&= \int_0^t \left(H|s-v|^{2H-1} - H|-v|^{2H-1} \right) dv \\
&= \int_0^t \left(H|s-v|^{2H-1} - H|v|^{2H-1} \right) dv \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}|s-v|^{2H-1} + \tfrac{1}{2}|v|^{2H} \right)\Big|_0^t \\
&= -\tfrac{1}{2}|s-t|^{2H-1} + \tfrac{1}{2}|s|^{2H-1} + \tfrac{1}{2}|t|^{2H} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(|s|^{2H-1} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H-1} \right)
\end{aligned}$$

Misalkan $S(\mathbb{R})$ adalah ruang Schwartz dari fungsi mulus yang menurun dengan cepat pada $\mathbb{R}$, dan $f \in S(\mathbb{R})$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$| f |_{\phi}^{2} := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s) f(t)\phi(s,t)dsdt < \infty \tag{7}$$

Jika ruang $S(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan hasil kali dalam (*inner product*) berikut

$$\langle f, g\rangle_{\phi} := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(s,t)dsdt \tag{8}$$

dengan $f, g \in S(\mathbb{R})$, maka ruang $S(\mathbb{R})$ dapat dinotasikan dengan $L_{\phi}^{2}(\mathbb{R})$, menjadi ruang Hilbert separabel. Jadi $\left(L_{\phi}^{2}(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ adalah ruang Hilbert.

Jika $f \in L_{\phi}^{2}(\mathbb{R})$, didefinisikan

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t) := \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dB^{(H)}(t) \tag{9}$$

dengan

$$f_n(t) = \sum_i a_i^n \mathrm{I}_{[t_i,t_{i+1})}(t) \to f(t)$$

$$\mathrm{I}_{[t_i,t_{i+1})}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

dan

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dB^{(H)}(t) := \sum_i a_i^n \left(B^{(H)}(t_{i+1}) - B^{(H)}(t_i)\right) \tag{10}$$

Secara umum definisi dari integral stokastik relatif terhadap gerak Brown fraksional dapat diberikan menggunakan representasi integral dari gerak Brown fraksional pada Persamaan (2). Untuk menyederhanakannya, dibatasi pada suatu integran yang deterministik. Untuk $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t) = c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\tau}^{\infty}(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(t)dt\right)dB(\tau) \tag{11}$$

dengan c_H didefinisikan berdasarkan (3)

Lemma 2

Jika $f(t) = \mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)$ dengan

$$\mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t \in (-\infty, s] \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

maka (2) identik dengan Persamaan (11).

Bukti :

$$
\begin{aligned}
B^{(H)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)\,dB^{(H)}(t) \\
&= c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\tau}^{\infty}(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}}\mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)\,dt\right)dB(\tau) \\
&= c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\tau}^{s}(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}}dt+\int_{\tau}^{0}(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}}dt\right)dB(\tau) \\
&= c_H\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\tau}^{s}(H-\tfrac{1}{2})(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}}dt+\int_{\tau}^{0}(H-\tfrac{1}{2})(t-\tau)^{H-\frac{3}{2}}dt\right)dB(\tau) \\
&= c_H\int_{\mathbb{R}}\left((t-\tau)^{H-\frac{1}{2}}\Big|_{\tau}^{s}+(t-\tau)^{H-\frac{1}{2}}\Big|_{\tau}^{0}\right)dB(\tau) \\
&= c_H\int_{\mathbb{R}}\left((s-\tau)^{H-\frac{1}{2}}-(\tau-\tau)^{H-\frac{1}{2}}+(\tau-\tau)^{H-\frac{1}{2}}-(-\tau)^{H-\frac{1}{2}}\right)dB(\tau) \\
&= c_H\int_{\mathbb{R}}\left((s-\tau)^{H-\frac{1}{2}}-(-\tau)^{H-\frac{1}{2}}\right)dB(\tau)
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti jika $f(t)=\mathrm{I}_{(-\infty,s]}(t)$ maka (2)identik dengan Persamaan (11)

Lemma 3

Misalkan

$$I_{-}^{h-1/2}\left(f(u)\right)=c_H(H-\tfrac{1}{2})\int_{u}^{\infty}(t-u)^{H-3/2}f(t)\,dt$$

dengan c_H didefinisikan berdasarkan (3)dan Γ menotasikan fungsi gamma. Maka $I_{-}^{H-1/2}$ adalah suatu isometri dari $L_{\phi}^{2}(\mathbb{R})$ ke $L^{2}(\mathbb{R})$.

Bukti :

Menggunakan definisi fungsi gamma dan fungsi beta maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\min(s,t)}\left((t-u)^{H-\frac{3}{2}}(s-u)^{H-\frac{3}{2}}\right)du &= \int_{0}^{\infty}\left((t-(s-v))^{H-\frac{3}{2}}(s-(s-v))^{H-\frac{3}{2}}\right)dv \\
&= \int_{0}^{\infty}\left((t-s+v)^{H-\frac{3}{2}}v^{H-\frac{3}{2}}\right)dv \\
&= \int_{0}^{\infty}\left((t-s+(t-s)w)^{H-\frac{3}{2}}((t-s)w)^{H-\frac{3}{2}}\right)(t-s)\,dw \\
&= \int_{0}^{\infty}(t-s)^{2H-3}\left((1+w)^{H-\frac{3}{2}}w^{H-\frac{3}{2}}\right)(t-s)\,dw \\
&= \int_{0}^{\infty}(t-s)^{2H-2}\left((1+w)^{H-\frac{3}{2}}w^{H-\frac{3}{2}}\right)dw
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\min(s,t)} \left((t-u)^{H-\frac{3}{2}}(s-u)^{H-\frac{3}{2}}\right)du &= |t-s|^{2H-2}\int_0^\infty \left((1+w)^{H-\frac{3}{2}}w^{H-\frac{3}{2}}\right)dw \\
&= |t-s|^{2H-2}\int_0^\infty \left(\frac{w^{\left(H-\frac{1}{2}\right)-1}}{(1+w)^{\frac{3}{2}-H}}\right)dw \\
&= |t-s|^{2H-2}\int_0^\infty \left(\frac{w^{\left(H-\frac{1}{2}\right)-1}}{(1+w)^{\left(H-\frac{1}{2}\right)+(2-2H)}}\right)dw \\
&= |t-s|^{2H-2}\,B\left(\left(H-\tfrac{1}{2}\right),\left(2-2H\right)\right) \\
&= |t-s|^{2H-2}\,\frac{\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2-2H\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)} \\
&= |t-s|^{2H-2}\,\frac{2H}{c_H^2\left(H-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Diasumsikan f dan g adalah fungsi kontinu yang kompak. Berdasarkan definisi diatas maka menggunakan (12)diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\left\langle I_-^{h-1/2} f(u), I_-^{h-1/2} g(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad= \left\langle c_H\left(H-\tfrac{1}{2}\right)\int_u^\infty (s-u)^{H-3/2}f(s)ds, c_H\left(H-\tfrac{1}{2}\right)\int_u^\infty (t-u)^{H-3/2}g(t)dt\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}}\left\{c_H\left(H-\tfrac{1}{2}\right)\int_u^\infty (s-u)^{H-3/2}f(s)ds\, c_H\left(H-\tfrac{1}{2}\right)\int_u^\infty (t-u)^{H-3/2}g(t)dt\right\}du \\
&\qquad= c_H^2\left(H-\tfrac{1}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_u^\infty (s-u)^{H-3/2}f(s)ds\int_u^\infty (t-u)^{H-3/2}g(t)dt\right\}du \\
&\qquad= c_H^2\left(H-\tfrac{1}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\left\{\int_{-\infty}^{\min\{s,t\}}(s-u)^{H-3/2}(t-u)^{H-3/2}du\right\}dsdt \\
&\qquad= c_H^2\left(H-\tfrac{1}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\left\{|t-s|^{2H-2}\frac{2H}{c_H^2\left(H-\frac{1}{2}\right)}\right\}dsdt \\
&\qquad= c_H^2\left(H-\tfrac{1}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)2H\left(H-\tfrac{1}{2}\right)|t-s|^{2H-2}dsdt \\
&\qquad= c_H^2\left(H-\tfrac{1}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)H(2H-1)|t-s|^{2H-2}dsdt \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(s,t)dsdt
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti $I_-^{H-1/2}$ adalah suatu isometri dari $L_\phi^2(\mathbb{R})$ ke $L^2(\mathbb{R})$.

Lemma 4

Jika $f, g \in L_\phi^2(\mathbb{R})$ maka $\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t)$ dan $\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^{(H)}(s)$ terdefinisi dengan baik (*well-defined*) dengan rata-rata nol, variabel random Gaussian dengan variansi $| f |_\phi^2$ dan $| g |_\phi^2$ dan

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)dB^{(H)}(t) \int_{\mathbb{R}} g(s)dB^{(H)}(s) \right) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(s)\phi(s,t)dsdt \\ &= \langle f, g \rangle_\phi \end{aligned} \tag{13}$$

Bukti :
Menggunakan (11) dan (12) maka diperoleh

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^{(H)}(s) \int_{\mathbb{R}} g(t)dB^{(H)}(t) \right] \\ &= \mathrm{E}\Bigg[c_H (H - \tfrac{1}{2}) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\tau^\infty (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(s)ds \right) dB(\tau) \\ &\qquad c_H (H - \tfrac{1}{2}) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\tau^\infty (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} g(t)dt \right) dB(\tau) \Bigg] \\ &= \mathrm{E}\Bigg[c_H^2 (H - \tfrac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\tau^\infty (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(s)ds \right) dB(\tau) \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\tau^\infty (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} g(t)dt \right) dB(\tau) \Bigg] \\ &= c_H^2 (H - \tfrac{1}{2})^2 \mathrm{E}\Bigg[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_\tau^\infty (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} f(s)ds \right) dB(\tau) \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\tau^\infty (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} g(t)dt \right) dB(\tau) \Bigg] \\ &= c_H^2 (H - \tfrac{1}{2})^2 \times \\ &\quad \mathrm{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(f(s)g(t) \left(\int_{-\infty}^{\min(t,s)} (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} dB(\tau)dB(\tau) \right) \right) dsdt \right] \\ &= c_H^2 (H - \tfrac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(f(s)g(t) \left(\int_{-\infty}^{\min(t,s)} (t-\tau)^{H-\frac{3}{2}} (s-\tau)^{H-\frac{3}{2}} d\tau \right) \right) dsdt \\ &= c_H^2 (H - \tfrac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(f(t)g(s) \left(|t-s|^{2H-2} \frac{2H}{c_H^2 (H - \frac{1}{2})} \right) \right) dsdt \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\left[\int f(s)dB^{(H)}(s)\int g(t)dB^{(H)}(t)\right]=2H(H-\tfrac{1}{2})\int\int f(s)g(t)\,|t-s|^{2H-2}\,dsdt$$
$$=\int\int f(s)g(t)H(2H-1)\,|t-s|^{2H-2}\,dsdt$$
$$=\int\int f(s)g(t)\phi(t,s)dsdt$$
$$=\langle f,g\rangle_{\phi}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathrm{E}\left[\int f(s)dB^{(H)}(s)\int g(t)dB^{(H)}(t)\right]=\langle f,g\rangle_{\phi}$.

Lemma 5

Jika gerak Brown fraksional didefinisikan sesuai dengan Mandelbrot dan Van Ness (1968) yaitu yang tertuang dalam (2), maka korelasi dari gerak Brown fraksional memunuhi sifat (5) berikut

$$\mathrm{E}[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)]=\frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H})$$

Bukti :

Jika $f(u)=\mathrm{I}_{[0,t]}$ dan $g(v)=\mathrm{I}_{[0,s]}$ dan menggunakan Lemma 2 dan Lemma 4 maka diperoleh

$$\mathrm{E}\left[B_t^{H}B_s^{(H)}\right]=\mathrm{E}\left[\int \mathrm{I}_{[0,t]}(u)dB^{(H)}(u)\int \mathrm{I}_{[0,s]}(v)dB^{(H)}(v)\right]$$
$$=\int\int \mathrm{I}_{[0,t]}(u)\mathrm{I}_{[0,s]}(v)\phi(u,v)dudv$$
$$=\int\int \mathrm{I}_{[0,t]}(u)\mathrm{I}_{[0,s]}(v)H(2H-1)\,|u-v|^{2H-2}\,dudv$$
$$=H(2H-1)\int_0^s\int_0^t |u-v|^{2H-2}\,dudv$$
$$=H(2H-1)\int_0^s\left(\int_0^v (v-u)^{2H-2}du+\int_v^t (u-v)^{2H-2}du\right)dv$$
$$=H\int_0^s\left(\left[-(v-u)^{2H-1}\right]_0^v+\left[(u-v)^{2H-1}\right]_v^t\right)dv$$
$$=H\int_0^s\left(v^{2H-1}+(t-v)^{2H-1}\right)dv$$
$$=\frac{1}{2}\left[v^{2H}-(t-v)^{2H}\right]_0^s$$

$$\mathrm{E}\left[B_t^H B_s^{(H)}\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right)$$

Jadi terbukti jika gerak Brown fraksional didefinisikan sesuai dengan Mandelbrot dan Van Ness (1968) yaitu yang tertuang dalam (2), maka korelasi dari gerak Brown fraksional memunuhi (5).

SIMPULAN

Representasi gerak Brown fraksional yang tertuang dalam (2) merupakan bentuk integral stokastik dari gerak Brown. Tujuan dalam makalah ini adalah menjabarkan tentang representasi integral gerak Brown fraksional yang diperkenalkan oleh Mandelbrot dan Van Ness (1968). Selain itu ditunjukkan bahwa representasi dalam (2) memenuhi sifat kovariansi gerak Brown fraksional pada (5). Dan hal ini tertuang dalam Lemma 5.

DAFTAR PUSTAKA

Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., & Zhang, T. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*: Springer.

Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review, 10*(4), 422-437.

Rostek, S. (2009). *Option Pricing in Fractional Brownian Markets*: Springer-Verlag Berlin.

REPRESENTASI INTEGRAL STOKASTIK UNTUK GERAK BROWN FRAKSIONAL

ORIGINALITY REPORT

23%	12%	18%	6%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Anggit Sasmito, Suciati Suciati, Maridi Maridi. "Analisis Asesmen dalam Bahan Ajar Biologi terhadap Potensi Pemberdayaan Kemampuan Berkomunikasi Siswa Kelas XI", PSEJ (Pancasakti Science Education Journal), 2017 Publication	2%
2	Submitted to University of Macau Student Paper	2%
3	etd.lib.clemson.edu Internet Source	1%
4	Kęstutis Kubilius, Yuliya Mishura, Kostiantyn Ralchenko. "Chapter 1 Description and Properties of the Basic Stochastic Models", Springer Science and Business Media LLC, 2017 Publication	1%
5	Biagini. "Intrinsic properties of the fractional Brownian motion", Probability and Its Applications, 2008 Publication	1%

6	media.wiley.com Internet Source	1 %
7	mat.izt.uam.mx Internet Source	1 %
8	dspace.cc.tut.fi Internet Source	1 %
9	www.fm.mathematik.uni-muenchen.de Internet Source	1 %
10	Litan Yan. "On the Linear Fractional Self-attracting Diffusion", Journal of Theoretical Probability, 06/2008 Publication	1 %
11	Submitted to University of Wales Swansea Student Paper	1 %
12	studia.ubbcluj.ro Internet Source	1 %
13	Submitted to Curtin University of Technology Student Paper	1 %
14	Charles El-Nouty. "On the (mixed) integrated fractional Brownian motion", 2017 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), 2017 Publication	<1 %
15	Francesca Biagini, Yaozhong Hu, Thilo Meyer-Brandis, Bernt Øksendal. "Insider trading	<1 %

equilibrium in a market with memory", Mathematics and Financial Economics, 2012
Publication

16	Submitted to The University of Manchester Student Paper	<1%
17	repository.ub.ac.id Internet Source	<1%
18	www.uni-ulm.de Internet Source	<1%
19	Stochastic Modelling and Applied Probability, 2014. Publication	<1%
20	tesis.ipn.mx Internet Source	<1%
21	vdocument.in Internet Source	<1%
22	Matheus de Oliveira Souza. "Equações diferenciais estocásticas e as estratégias de hedging no mercado de opções", Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA), 2022 Publication	<1%
23	Qing Li, Steven Y. Liang. "Degradation Trend Prognostics for Rolling Bearing Using Improved R/S Statistic Model and Fractional	<1%

Brownian Motion Approach", IEEE Access, 2018
Publication

---

24 pdfcookie.com
Internet Source
<1 %

---

25 vmsta.org
Internet Source
<1 %

---

26 Biagini. "Pathwise integrals for fractional Brownian motion", Probability and Its Applications, 2008
Publication
<1 %

---

27 Manuel Portilheiro, Juan Luis Vázquez. "Degenerate homogeneous parabolic equations associated with the infinity-Laplacian", Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2012
Publication
<1 %

---

28 Maslowski, Bohdan, and Ciprian A. Tudor. "Drift parameter estimation for infinite-dimensional fractional Ornstein–Uhlenbeck process", Bulletin des Sciences Mathématiques, 2013.
Publication
<1 %

---

29 Nualart, E.. "The fractional stochastic heat equation on the circle: Time regularity and potential theory", Stochastic Processes and their Applications, 200905
Publication
<1 %

30	Swishchuk, . "Stochastic Stability of Fractional RDS in Finance", Random Dynamical Systems in Finance, 2013. Publication	<1 %
31	hal.archives-ouvertes.fr Internet Source	<1 %
32	open.library.ubc.ca Internet Source	<1 %
33	projecteuclid.org Internet Source	<1 %
34	Jianfeng Zhang. "Backward Stochastic Differential Equations", Springer Science and Business Media LLC, 2017 Publication	<1 %
35	Jorge Luis Torrejón Matos. "Aproximação numérica à convolução de Mellin via mistura de exponenciais", 'Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA)', 2017 Internet Source	<1 %
36	Lucian Maticiuc, Tianyang Nie. "Fractional Backward Stochastic Differential Equations and Fractional Backward Variational Inequalities", Journal of Theoretical Probability, 2013 Publication	<1 %

37	Satoshi Taguchi, Kazuo Aoki, Vladimir Latocha. "Vapor Flows Along a Plane Condensed Phase with Weak Condensation in the Presence of a Noncondensable Gas", Journal of Statistical Physics, 2006 Publication	<1 %
38	Francis Hirsch, Christophe Profeta, Bernard Roynette, Marc Yor. "Peacocks and Associated Martingales, with Explicit Constructions", Springer Science and Business Media LLC, 2011 Publication	<1 %
39	Jeltsema, Dimitri, and Jacob van der Woude. "Currents' Physical Components (CPC) in the time-domain: Single-phase systems", 2014 European Control Conference (ECC), 2014. Publication	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 5 words
Exclude bibliography	On		