KALKULUS INTEGRAL

Penyusun : Febi Sanjaya, M.Sc., Beni Utomo, M.Sc., A. Yudhi Anggoro, M.Si.

[DATE]

[COMPANY NAME]
[Company address]

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas berkat, rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar *Kalkulus Integral*. Buku ini ditulis untuk memudahkan mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma dalam memahami konsep-konsep terkait integral. Selain itu buku ini dapat menjadi pegangan dosen untuk membawakan kuliah Kalkulus Integral.

Acuan utama penulisan buku ini adalah buku *Thomas' Calculus Early Transendental.* Isi yang disajikan pada buku tidak hanya materi, tetapi buku ini juga memuat contoh-contoh soal dan penjelasan secara lengkap dan jelas. Beberapa konsep juga diberikan ilustrasi untuk memudahkan pemahaman. Selain itu pada setiap akhir materi diberikan latihan-latihan soal untuk dikerjakan.

Buku ini terdiri dari 4 bab. Bab pertama berisi tentang konsep integral melalui anti turunan. Bab kedua berisi tentang konsep integral dipandang dari luas wilayah yang dilanjutkan dengan pengertian Integral Riemann. Selain itu dibahas pula Teorema Fundamental Kalkulus yang merupakan penghubung antara konsep luas wilayah dengan anti turunan. Bab ketiga berisi penggunaan Integral untuk menghitung volume, baik benda putar maupun benda yang diketahui irisan penampangnya. Bab keempat berisi tentang teknik-teknik pengintegralan meliputi integral substitusi, integral parsial, integral fungsi rasional dan substitusi trigonometri.

Terima kasih penulis sampaikan kepada Dr. Hongki Julie, M.Si. selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika atas kesempatan yang telah diberikan dan telah memfasilitasi penulisan buku ini. Juga kepada semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ini.

Kami menyadari masih terdapat banyak kekurangan pada buku ini. Untuk itu, kritik dan saran sangat diharapkan untuk penyempurnaan buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma dan bagi semua pihak yang membutuhkan.

Yogyakarta, November 2017

Penulis

UNIVERSITAS SANATA DHARMA

Fakultas	:	Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Program Studi	:	Pendidikan Matematika

SILABUS

A. Identitas Mata Kuliah

1.	Kode Mata Kuliah	: KPM 306D
2.	Nama Mata Kuliah	: Kalkulus Integral
3.	SKS/JP / Sifat Mata Kuliah	: 4 SKS / 4 JP / Wajib
4.	Prasyarat	: Kalkulus Diferensial
5.	Semester / Tahun Akademik	: Ganjil / 2016
6.	Dosen	: Febi Sanjaya, M.Sc. Beni Utomo, M.Sc. A. Yudhi Anggoro, M.Si.

B. Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah Kalkulus Integral ini merupakan kelanjutan dari mata kuliah kalkulus diferensial. Pada mata kuliah ini diharapkan mahasiswa mampu memahami konsep-konsep tentang integral dan mampu menyelesaikan masalah-masalah integral diantaranya yang berhubungan dengan luasan, volume benda putar, pengintegralan dengan metode substitusi dan parsial. Selain itu dibahas pula pengintegralan fungsi pecah rasional dan fungsi rasional. Pelaksanaan kuliah menggunakan metode ceramah dan diskusi. Evaluasi pembelajaran dalam kuliah ini akan dilaksanakan dalam bentuk penugasan, UTS 1, UTS 2 dan UAS. Buku acuan utama yang digunakan adalah Thomas' Calculus Early Transendental.

C. Capaian Pembelajaran Mata kuliah

C.1. *Competence* (Kemampuan) :

1. Mahasiswa mampu menguasai materi, struktur, konsep kalkulus integral yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran kalkulus integral di sekolah dan studi lanjut serta mengikuti perkembangan ilmu kalkulus integral.
2. Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep dan pola pikir kalkulus integral untuk memfasilitasi pengembangan potensi peserta didik melalui komunikasi yang efektif dan empatik.

C.2. *Conscience* (Suara Hati) :

Mahasiswa memiliki ketekunan.

C.3. *Compassion* (Bela Rasa) :

Mahasiswa memiliki kepedulian terhadap sesama

D. Materi Kuliah

Anti Turunan, Konsep Luas Daerah (Riemann), Teorema Fundamental Kalkulus I & II, Integral Tertentu beserta sifat-sifatnya, Integral Substitusi, Integral Parsial, Integral Fungsi Rasional, Integral Substitusi Trigonometri, Luas daerah antara 2 kurva, Volume benda pejal (metode Kulit Tabung dan Cakram), Luasan Benda Putar.

E. Kegiatan Pembelajaran

Ceramah, Diskusi, Latihan Soal, Tugas, Kuis.

F. Evaluasi Pembelajaran

No	Jenis Evaluasi	Bentuk	Bobot (%)
1.	Tugas 1	Tertulis	5
2.	UTS 1	Tertulis	15
		Kuisioner (C2, C3)	10
3.	Tugas 2	Tertulis	5
4.	UTS 2	Tertulis	15
		Kuisioner (C2, C3)	10

5.	Kuis	Tertulis	20
6.	UAS	Tertulis	20
Total			**100**

G. Referensi

Stewart, J. 2010. Calculus. Concepts and Contexts, 4th edition. Brook/Cole, Canada.

Supama, dkk. 2003. Kalkulus II. FMIPA UGM, Yogyakarta.

Thomas, G. B., Weir, M. D., and Hass, J. 2013. Calculus. Early Transcendentals, 13th edition. Pearson, Boston.

DAFTAR ISI

BAB I

ANTI TURUNAN

Anti Turunan

Dalam banyak kasus, kita perlu mendapatkan suatu fungsi yang turunannya diketahui. Sebagai contoh ingatlah kembali rumus-rumus fisika tentang gerak lurus berikut.

$$S(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \ldots(1)$$
$$v(t) = v_0 + at \qquad \ldots(2)$$

Rumus (1) merupakan rumus jarak yang ditempuh benda setelah t satuan waktu dan rumus (2) adalah rumus kelajuan benda saat t. Kedua rumus di atas saling berkaitan. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right) \\ &= v_0 + at \\ &= v(t) \end{aligned}$$

Dengan kata lain, fungsi kelajuan diperoleh dengan menurunkan fungsi jarak satu kali. Bagaimana sebaliknya? Jika diberikan rumus fungsi kelajuan, bagaimana kita dapat mendapatkan rumus fungsi jarak dari fungsi itu?

Secara umum, masalah ini adalah masalah mendapatkan fungsi F sedemikian hingga turunan dari F adalah f. Jika fungsi F demikian ada, fungsi tersebut disebut *anti turunan* dari f.

Definisi

Fungsi F disebut *anti turunan* dari f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in I$.

■

Dalam subbab ini kita akan mengembangkan cara yang sistematis untuk menentukan fungsi-fungsi yang turunannya diketahui. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1

Tentukan anti turunan dari $f(x) = x$.

Penyelesaian :

Karena $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=x$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)=x$ dan $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+\pi\right)=x$, maka $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}x^2+2$ dan $\frac{1}{2}x^2+\pi$ adalah anti turunan dari $f(x)=x$.

Dalam contoh di atas nampak bahwa anti turunan suatu fungsi tidak tunggal. Secara umum, jika $F(x)$ adalah anti turunan dari f dan C adalah suatu konstanta, maka $F(x)+C$ juga merupakan antiturunan dari f.

Sampai di sini timbul pertanyaan, adakah anti turunan dari f yang tidak diperoleh dari menambahkan konstanta pada F ? Asalkan kita hanya memperhatikan nilai-nilai x dalam suatu interval I, jawabannya adalah tidak.

Definisi

Koleksi semua anti turunan dari f disebut integral taktentu dari f terhadap x dan dinotasikan dengan

$$\int f(x)\,dx.$$

Simbol $\int$ disebut **tanda integral**, fungsi f disebut **integran** dari integral dan x disebut **variabel integrasi**.

■

Berikut disajikan sejumlah rumus integral dasar yang akan sangat berguna untuk menentukan anti turunan suatu fungsi.

Rumus Turuan	Rumus Integral
$\frac{d}{dx}(x)=1$	$\int 1\,dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)=x^r$	$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C; r \neq 1$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

Contoh 1

Tentukan $\int (x^2 - 2x + 5) dx$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) dx &= \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan $\int \frac{2}{5} \sec\theta \tan\theta d\theta$.

Penyelesaian :

$$\int \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta d\theta = \frac{2}{5}\int \sec\theta\tan\theta d\theta$$
$$= \frac{2}{5}\sec\theta + C$$

Contoh 3

Tentukan $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$.

Penyelesaian :

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x}dx$$
$$= \int \csc x.\cot x dx$$
$$= -\csc x + C$$

Contoh 4

Tentukan $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4}dt$.

Penyelesaian :

$$\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt = \int \left(t^{-2} - 2\right) dt$$
$$= \int t^{-2} dt - \int 2dt$$
$$= -\frac{1}{t} - 2t + C$$

Contoh 5

Tentukan fungsi F sedemikian hingga $F'(x) + \sin x = 0$ dan $F(0) = 2$.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $F'(x) = -\sin x$. Dengan demikian

$$F(x) = \int F'(x) dx = -\int \sin x dx = \cos x + C.$$

Karena $F(0) = 2$ maka $C = 1$. Dengan demikian $F(x) = \cos x + 1$

Contoh 6

Dalam kondisi tertentu, banyaknya sel kanker $N(t)$ pada saat t meningkat dengan kelajuan $N'(t) = Ae^{kt}$, dengan A adalah kelajuan saat $t = 0$ (dalam sel per hari) dan k adalah suatu konstanta.

a. Jika $A = 50$ dan saat hari ke 5, sel kanker tumbuh dengan kelajuan 250 per hari. Tentukan rumus banyaknya sel kanker setelah t hari, jika terdapat 300 sel saat $t = 0$.

b. Gunakan jawaban nomor a untuk menentukan banyaknya sel kanker setelah 12 hari.

Penyelesaian :

a. Diketahui bahwa $A = 50$, sehingga

$$\begin{aligned} N(t) &= \int N'(t)dt \\ &= \int 50e^{kt}dt \\ &= \frac{50}{k}e^{kt} + C \end{aligned}$$

Karena $N'(5) = 250$ maka,

$$N'(5) = 50e^{5k}$$
$$250 = 50e^{5k}$$
$$5 = e^{5k}$$
$$5k = \ln 5$$
$$k = \frac{\ln 5}{5}$$

Dengan demikian,

$$N(t) = \frac{50}{\ln 5 / 5} e^{\frac{\ln 5}{5}t} + C$$
$$= \frac{250}{\ln 5} 5^{t/5} + C$$

Di lain pihak, karena $N(0) = 300$ maka

$$N(t) = \frac{250}{\ln 5} 5^{t/5} + C$$
$$300 = \frac{250}{\ln 5} + C$$
$$C = 300 - \frac{250}{\ln 5}$$

Dengan demikian, $N(t) = \frac{250}{\ln 5} 5^{t/5} + 300 - \frac{250}{\ln 5}$.

b. Banyaknya sel kanker setelah 12 hari adalah

$$N(12) = \frac{250}{\ln 5} 5^{12/5} + 300 - \frac{250}{\ln 5}$$
$$\approx 7537$$

Contoh 7

Seorang pengemudi mengerem mobilnya yang sedang melaju di jalan lurus dengan kelajuan 55 mil per jam. Akibatnya, mobil melambat dengan perlambatan 11 ft/sec^2.

a. Kapan mobil itu berhenti?

b. Berapa jarak yang ditempuh mobil mulai dari pengereman sampai berhenti?

Penyelesaian :

a. Diketahui $v_0 = 55\,\text{mil/jam} = \dfrac{242}{3}\,\text{ft/sec}$ dan $a = -11\,\text{ft/sec}^2$.

Mobil berhenti saat $v(t) = 0$. Dengan demikian,

$$v(t) = v_0 + at$$
$$0 = \frac{242}{3} - 11t$$
$$11t = \frac{242}{3}$$
$$t = \frac{22}{3} = 7{,}34$$

Jadi, mobil berhenti setelah $7{,}34$ detik.

b. Jarak yang ditempuh mobil mulai direm sampai berhenti

$$S(t) = \int \left(\frac{242}{3} - 11t \right) dt$$

$$= \frac{242}{3} t - \frac{11}{2} t^2$$

$$S\left(\frac{22}{3} \right) = \frac{242}{3} . \frac{22}{3} - \frac{11}{2} \left(\frac{22}{3} \right)^2$$

$$= 295{,}78 \ \ ft$$

Latihan

Tentukan antiturunan dari fungsi berikut!

1. $f(x) = 4x + 7$
2. $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3} x^2 + 5x$
3. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = (x-5)^2$
5. $f(x) = \frac{1}{5} - \frac{2}{x}$
6. $f(x) = \frac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$
7. $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x}$

8. $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$

9. $f(x)=e^2$

10. $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{}{}/2}$

11. $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}$

12. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

13. $f(x)=\dfrac{2x^4+4x^3-x}{x^3}, \quad x>0$

14. $f(\theta)=2\sin\theta-\sec^2\theta$

15. $f(v)=2\cos v-\dfrac{3}{\sqrt{1-v^2}}$`

16. $f(x)=\sin\pi x-3\sin 3x$

17. $f(x)=\sec^2 x$

18. $f(x)=1+2\sin x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

19. $f(x)=\pi\cos\pi x$

20. $f(x)=\sec^2 x$

Hitunglah

21. $\int x^6\, dx$

22. $\int (12x^2 - 7x + 2)\, dx$

23. $\int \frac{dx}{x^6}$

24. $\int (8x^3 + 10x^2 - 7x + 5)\, dx$

25. $\int (2x^2 - 5x + 3)\, dx$

26. $\int \left(s^3 + 2\right)^2 (3s^2)\, dx$

27. $\int \sqrt[3]{1 - x^2}\; x\, dx$

28. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt[4]{x^3 + 2}}$

29. $\int 3x\sqrt{1 - 2x^2}\; dx$

30. $\int 5x(x^4 + 2)\, dx$

31. $\int (10x^{-3.5} + 4x^{-1})\, dx$

32. $\int 3e^{-0.2x}\, dx$

33. $\int \left(e^{8u} + 4u\right) du$

34. $\int 11^x\, dx$

35. $\int (-2\cos t)\, dt$

36. $\int 7\sin\frac{\theta}{3}\,d\theta$

37. $\int\left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right)dx$

38. $\int \frac{2}{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

39. $\int\left(4\sec x\tan x-2\sec^2 x\right)dx$

40. $\int\left(2\cos 2x-3\sin 3x\right)dx$

41. $\int\frac{\sin y}{\cos^2 y}\,dy$

42. $\int\cos^4 x\sin x\,dx$

Pada soal no 43 – 46, tentukan fungsi harga untuk masing-masing fungsi berikut.

43. $C'(x)=3x-1,$ biaya tetap \$3

44. $C'(x)=0.05e^{0.02x}$, biaya tetapnya \$5

45. $C'(x)=x^{1/2}$, biaya tetapnya \$45

46. $C'(x)=x+1/x^2;$ biaya 2 unit \$5.50

47. Program keselamatan pengendara motor negara bagian Illinois mengharuskan pengendara motor mampu mengerem dari

kecepatan 44 ft/s menjadi 0 ft/ s dalam jarak 45ft. Berapakah perlambatan motor agar hal tersebut dapat dilakukan?

48. Percepatan suatu objek adalah $a(t) = 5t^2 + 4$ dan kecepatannya saat $t = 0$ adalah $v(0) = 6.$ Tentukan $v(t).$

49. Suatu objek dijatuhkan dari sebuah pesawat terbang pada ketinggian 6400ft. Jika diasumsikan $a(t) = -32$`ft/s dan $v(0) = 0$, tentukan $s(t).$ Berapa lama waktu yang diperlukan objek tersebut untuk sampai ke permukaan tanah?

50. Perkiraan laju perubahan jumlah aplikasi paten yang diterima di China dalam beberapa tahun adalah $p'(t) = 43.14t - 143.5$ Dimana t merupakan lamanya tahun sejak 2000, dan p merupakan banyaknya paten (dalam ribuan). Pada 2008, 828.328 aplikasi paten yang diterima. (sumber: State Intellectual Property Office of the P. R.C.
    a. Tentukan fungsi jumlah aplikasi paten yang diterima China dalam tahun t
    b. Berdasarkan fungsi tersebut, berapakah banyak aplikasi paten yang diterma dalam tahun 2013?

51. Suatu model untuk menggambarkan populasi kumbang dewasa melibatkan evaluasi integral

$$\int \frac{g(x)}{x}\, dx,$$

Dimana $g(x)$ merupakan tingkat pertumbuhan per unit untuk suatu populasi dari ukuran x. Peneliti mempertimbangkan kasus sederhana ini dalam $g(x) = a - bx$ untuk konstanta positif $a\ dan\, b$. Tentukan integral dalam kasus ini.

52. Sebuah batu dijatuhkan dari tebing dan menyentuh tanah dengan kecepatan $120\, ft/s.$berapakah ketinggian tebing terebut?

53. Berdasarkan hukum Fick, difusi zat terlarut melintasi membran sel diberikan oleh fungsi

$$c'(t) = \frac{kA}{V}[C - c(t)], \qquad (1)$$

Dengan A merupakan daerah membrane sel,V merupakan volume sel, $c(t)$ merupakan konsentrasi di dalam sel pada waktu t`, C merupakan konsentrasi di luar sel, dan k merupakan konstanta. Jika c_0 merupakan konsentrasi zat terlarut di dalam sel ketika $t = 0$, maka dapat ditunjukkan bahwa

$$c(t) = \left(c_0 - C\right)e^{-kAt/V} + C. \qquad (2)$$

a. Gunakan hasil akhir untuk menentukan $c'(t)$.`

b. Substitusi kembali ke persamaan (1) menunjukkan bahwa (2) merupakan antiturunan dari (1).

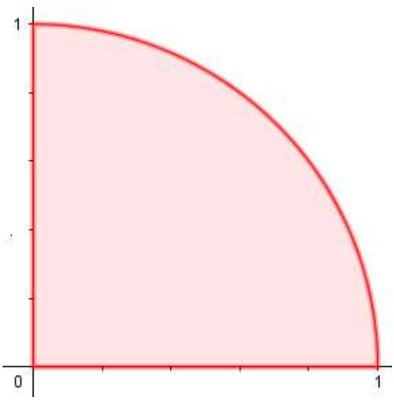
BAB II

PENGGUNAAN INTEGRAL

Konsep luas daerah

Pada subbab ini akan dikembangkan suatu metode untuk menghitung luas daerah secara lebih umum. Integral tentu merupakan salah satu kunci pada kalkulus yang dipakai untuk mendefinisikan dan menghitung suatu kuantitas penting yang ada pada matematika, misalnya luasan, volume, panjang kurva , dan kuantitas lainnya.

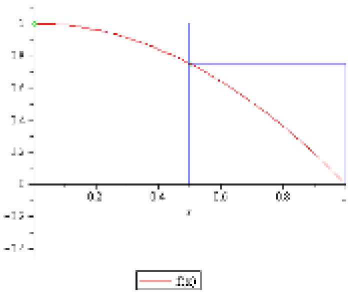
Luas suatu daerah

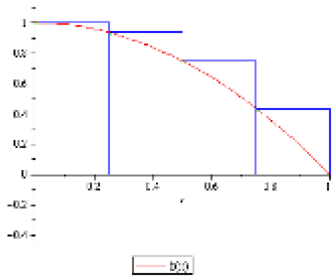


Misalkan ingin diketahui luas daerah R yang berada di atas sumbu X, dibawah kurva $y = 1 - x^2$, dan berada di antara garis vertikal $x = 0$ dan $x = 1$. Memperhatikan luasan tersebut ternyata tidak satu bentuk geometri sederhana yang ada sekarang bisa dipakai untuk membantu menghitungnya. Bahasan selanjutnya berkaitan dengan suatu cara untuk menghitung luasan daerah yang bentuknya demikian.

<u>Pendekatan luas dengan persegi panjang</u>

Persegi panjang merupakan bentuk geometri yang mudah untuk menentukan luas daerahnya.





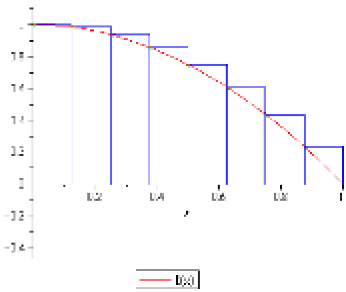
Luas daerah R tidak bisa diketahui secara langsung menggunakan benda geometri bidang dua dimensi yang ada. Salah satu cara yang mungkin untuk bisa membantu menghitung luas daerah tersebut adalah dengan menjawab dengan kira-kira atau aproksimasi, bukan luas sebenarnya tapi luas pendekatan. Luas pendekatan dilakukan dengan mengasumsikan luas daerah R berbentuk persegi panjang. Misalkan luasan R akan dihitung dengan dua luas persegi panjang.

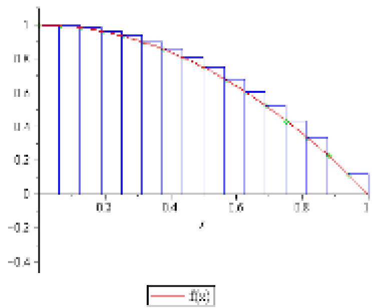
$$R \approx A_1 + A_2 = p_1.l_1 + p_2.l_2 = 1.\frac{1}{2} + \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Pendekatan lain bisa dilakukan dengan membuat empat persegi panjang,

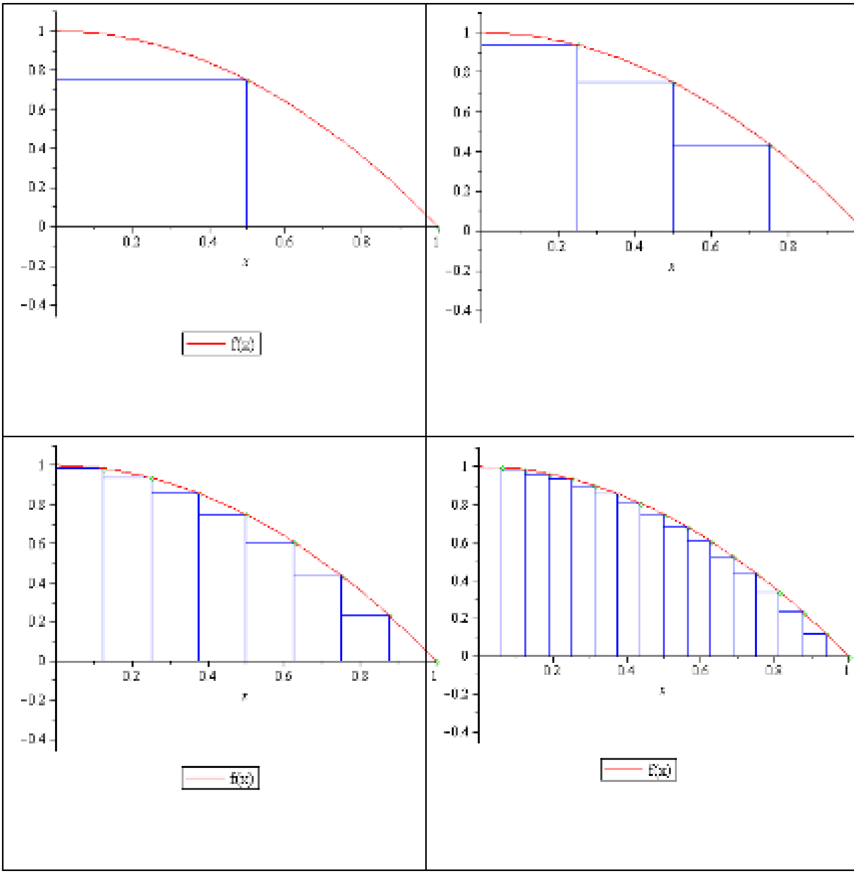
$$R \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1.\frac{1}{4} + \frac{15}{16}.\frac{1}{4} + \frac{3}{4}.\frac{1}{4} + \frac{7}{16}.\frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0{,}78125$$

Memperhatikan luas pendekatan menggunakan 2 dan 4 persegi panjang, luas dengan jumlah persegi panjang lebih banyak menghasilkan pendekatan yang lebih baik untuk menghitung luas sebenarnya.

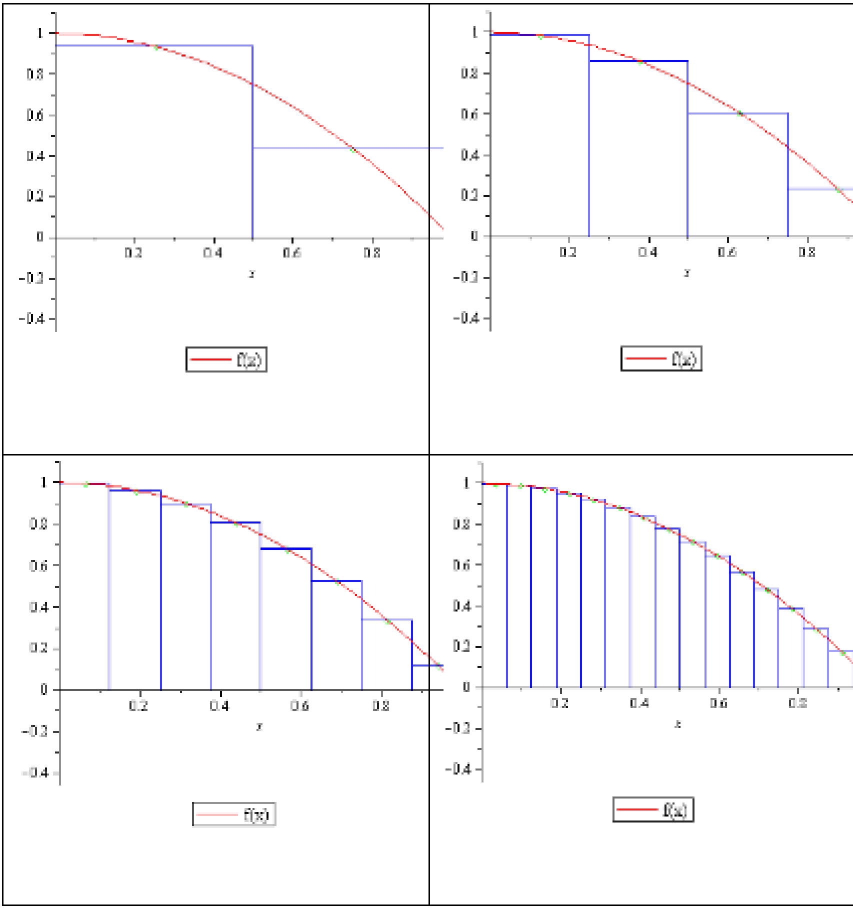




Pendekatan lain bisa dilakukan dengan membuat persegi panjang dengan cara berikut ini:



Dan juga dengan cara berikut ini:



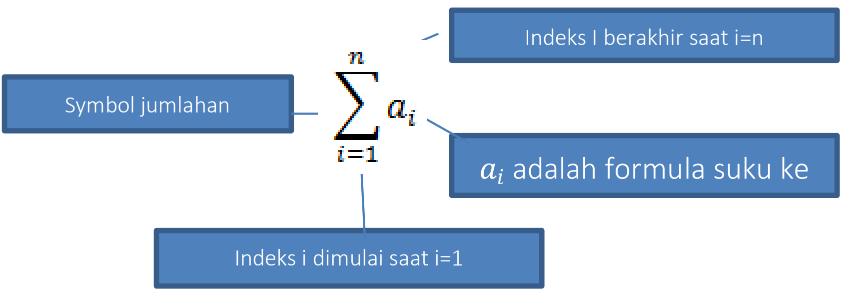
Berikut adalah perbandingan luas pendekatan dengan beberapa persegipanjang dengan ketiga cara tersebut.

Tabel 1.3 Jumlahan Hingga untuk Pendekatan Luas R			

banyaknya subinterval	Jumlahan Kiri	Jumlahan Tengah	Jumlahan Kanan
2	0,875	0,6875	0,375
4	0,78125	0,671875	0,53125
16	0,6972656252	0,6669921872	0,6347656252
50	0,6766	0,6667	0,6566
100	0,67165	0,666675	0,66165
1000	0,6671665	0,6666667502	0,6661665

Notasi Sigma

Pada pembahasan mengenai luas pendekatan sebelumnya, ditemui suatu jumlahan yang melibatkan sampai 1000 suku seperti tabel. Menjumlahkan dengan jumlah suku 1000 atau jumlah suku ada cukup banyak menjadi hal yang tidak efektif. Bahasan berikut akan mengkaji suatu notasi yang berkaitan dengan menyatakan suatu jumlahan. Notasi tersebut adalah notasi sigma ($\sum$).



Huruf Yunani $\sum$ merupakan huruf kapital yang artinya “jumlah”. Indeks jumlahan n menyatakan kapan jumlahan dimulai (diletakkan dibawah notasi) dan kapan akan berakhir (diletakkan pada bagian atas). Untuk indeks bisa menggunakan sebarang huruf, misalkan I, j, atau k.

Misalkan jumlahan $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

bisa dituliskan

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = \sum_{i=1}^{10} i$$

Berikut beberapa contoh penulisan jumlahan dalam bentuk notasi sigma.

1. $\sum_{k=1}^{7} k = 1+2+3+4+5+6+7$
2. $\sum_{k=2}^{6} k = 2+3+4+5+6$
3. $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
4. $\sum_{j=0}^{2} \frac{j+1}{j+2} = \frac{0+1}{0+2}+\frac{1+1}{1+2}+\frac{2+1}{2+2}$

Suatu jumlahan bisa dinyatakan dalam beberapa bentuk notasi sigma, misalkan:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{j=1}^{5} j$
2. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^{5} k$
3. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{j=0}^{4} (j+1)$
4. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{j=5}^{9} (j-4)$

Sifat-sifat notasi sigma:

Misalkan diberikan $\sum_{i=1}^{n} a_i$ dan $\sum_{i=1}^{n} b_i$,

1. Jumlahan pada notasi Sigma

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + b_{3+\dots} + b_n$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_{3+\dots} + b_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

2. Pengurangan pada notasi Sigma

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Perkalian Sigma dengan konstanta

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

4. Aturan jumlahan konstan

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc$$

Sifat-sifat tersebut akan sangat membantu dalam melakukan perhitungan atau operasi yang melibatkan notasi Sigma.

Contoh penggunaan sifat tersebut:

a. $\sum_{i=1}^{5} 3 = 3.5 = 15$

b. $\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2 = 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right)$

c. $\sum_{j=1}^{4} \left(2j^2 + 5j\right) = \sum_{j=1}^{4} 2j^2 + \sum_{j=1}^{4} 5j = 2\sum_{j=1}^{4} j^2 + 5\sum_{j=1}^{4} j$

Latihan

Tentukan jumlahan berikut ini:

1. $\sum_{i=1}^{5} (i+1)$
2. $\sum_{j=1}^{6} \left(\frac{1}{j+3}\right)$
3. $\sum_{i=1}^{10} (2i+5)$
4. $\sum_{k=1}^{5} \left(k^2+1\right)$
5. $\sum_{j=1}^{7} \left(j^2+2j+1\right)$

Nyatakan bentuk berikut ini dalam notasi sigma:

6. $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

7. $2+4+6+8+10$

8. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$

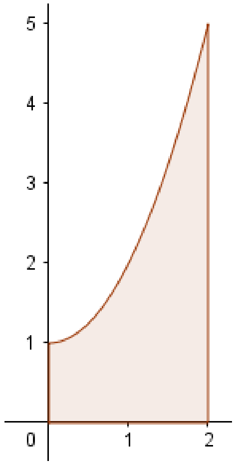
9. $1-3+5-7+9-11+13-15$

10. $a_1+a_2+a_3+...+a_{99}$

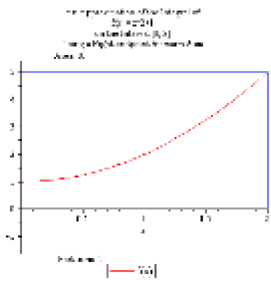
Jumlahan Rieman (Luasan dan Perkiraan Luas dengan Jumlahan Hingga)

Jumlahan Riemann merupakan suatu pendekatan untuk menghitung luas suatu daerah dengan cara membaginya menjadi persegipanjang-persegipanjang kecil, menghitung luas persegipanjang tersebut dan menjumlahkannya. Proses dilakukan dengan cara membagi interval menjadi beberapa subinterval dan pada setiap subinterval tersebut dipilih salah satu titik untuk dihitung nilai fungsinya sebagai titik tinggi. Selanjutnya dengan membuat asumsi setiap luasan kecil berbentuk persegipanjang maka luas persegipanjang kecil diperoleh dengan cara nilai fungsi dikalikan dengan lebar subinterval.

Misalkan akan dihitung luas daerah berikut ini:

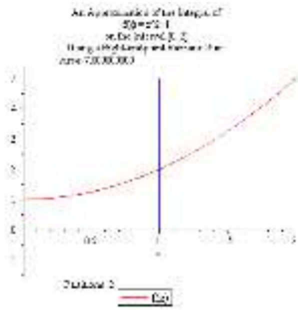


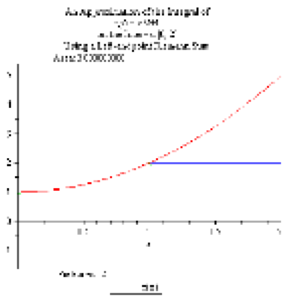
Daerah tersebut mempunyai batas atas $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + 1$, batas bawah sumbu X, batas kiri garis $x = 0$ dan batas kanan garis $x = 2$. Jika luasan tersebut diasumsikan berbentuk persegipanjang maka luasnya diperkirakan menjadi seperti berikut ini.



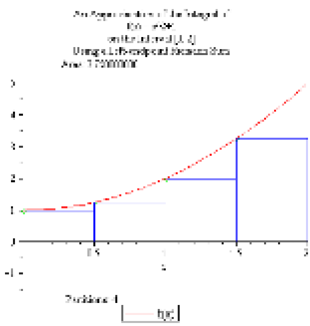
Persegipanjang yang bisa dibuat bisa dengan beberapa cara, tergantung titik tinggi menggunakan titik yang mana. Pada gambar (a) titik tinggi menggunakan nilai fungsi f(0)=1 sedangkan pada gambar (b) menggunakan tinggi f(2). Luas persegi panjang (a) adalah 2 satuan luas sedangkan luas persegipanjang pada (b) adalah 10 satuan luas. Kedua pendekatan tersebut merupakan pendekatan yang dilakukan secara benar, tapi mempunya perbedaan yang cukup besar.

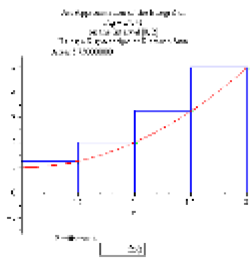
Pendekatan lain bisa dilakukan dengan menambah jumlah persegipanjang, misalnya menjadi 2 persegipanjang dan 4 persegipanjang. Berikut adalah ilustrasinya.





Menggunakan 4 persegipanjang





Secara umum, pengambilan jumlah persegi panjang jadi 2 atau 4 pada penjelasan tersebut dilakukan dengan mengambil lebar persegipanjang dibuat sama semua. Misalkan pada pendekatan luas daerah tersebut dengan menggunakan 4 persegipanjang. Proses dilakukan dengan membuat subinterval atau membagi interval [0,2] menjadi 4 subinterval yang masing-masing subinterval berukuran sama yaitu 0,5. Secara umum diperoleh subinterval sebagai berikut:

$$[0,2]=[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1]\cup[1,\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},2]$$

Atau secara umum bisa ditulis:

$$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup[x_2,x_3]\cup[x_3,x_4]$$

Dengan: $x_0=0$

$$x_1=x_0+1.\Delta x=0+1.\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

$$x_2=x_0+2.\Delta x=0+2.\tfrac{1}{2}=2.\tfrac{1}{2}=1$$

$$x_3=x_0+3.\Delta x=0+3.\tfrac{1}{2}=3.\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{2}$$

$$x_4=x_0+4.\Delta x=0+4.\tfrac{1}{2}=4.\tfrac{1}{2}=2$$

Interval 1: $[0,\tfrac{1}{2}]$ mempunyai lebar $\Delta x_1=\tfrac{1}{2}-0=\tfrac{1}{2}$

Interval 2: $[\tfrac{1}{2},1]$ mempunyai lebar $\Delta x_2=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$

Interval 3 : $[1,\frac{3}{2}]$ mempunyai lebar $\Delta x_3 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Interval 4: $[\frac{3}{2}, 2]$ mempunyai lebar $\Delta x_4 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Pada contoh tersebut semua subinterval mempunyai lebar yang sama yaitu $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{1}{2}$.

Penyataan subinterval-subinterval seperti pada persamaan $[0,2] = [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1] \cup [1,\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2},2]$ dinamakan partisi interval [0,2].

Partisi himpunan juga bisa dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\mathrm{P} : \mathrm{a} = 0 < \tfrac{1}{2} < 1 < \tfrac{3}{2} < 2 = b$$

Atau jika diberikan sebarang interval tertutup $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ bisa dibentuk partisi:

$$\mathrm{P} : \mathrm{a} = 0 = \mathrm{x}_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Pada partisi tersebut tidak selalu lebar tiap subinterval dibuat sama. Berikut adalah contohnya:

$$[0,3] = [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1] \cup [1,2] \cup [2,\tfrac{5}{2}] \cup [\tfrac{5}{2},3]$$

Pada contoh tersebut, interval [0,3] dibagi menjadi 4 subinterval dengan lebar setiap subinterval tidak sama, yaitu:

Interval 1: $[0,\frac{1}{2}]$ mempunyai lebar $\Delta x_1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Interval 2: $[\frac{1}{2},1]$ mempunyai lebar $\Delta x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Interval 3 : $[1,2]$ mempunyai lebar $\Delta x_3 = 2 - 1 = 1$

Interval 4: $[2,\frac{5}{2}]$ mempunyai lebar $\Delta x_4 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

Interval 4: $[\frac{5}{2},3]$ mempunyai lebar $\Delta x_4 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Secara umum lebar interval tidak perlu dibuat sama, berikut adalah contohnya hanya ada beberapa keuntungan jika lebar subinterval dibuat sama.

Secara umum, jika suatu interval [a,b] dipartisi menjadi n subinterval yang sama besar maka akan diperoleh sebagai berikut:

Misalkan interval [a,b] akan dipartisi menjadi n subinterval, proses dilakukan dengan membagi interval menjadi n subinterval sama besar dengan lebar setiap subinterval adalah $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Untuk setiap subinterval $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ dengan $i = 1, 2, ..., n$ diperoleh:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + 1.\Delta x = a + 1.\frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = a + 2.\Delta x = a + 2.\frac{b-a}{n}$$

$$x_3 = a + 3.\Delta x = a + 3.\frac{b-a}{n}$$

…………………..

$$x_i = a + i.\Delta x = a + i.\frac{b-a}{n}$$

………………

$$x_{i-1} = a + (\mathrm{i}-1).\Delta x = a + (\mathrm{i}-1).\frac{b-a}{n}$$

$$x_n = a + n.\Delta x = a + n.\frac{b-a}{n} = a + b - a = b\ .$$

Selanjutnya partisi pada [a,b] ditulis dengan:

$$\mathrm{P} : \mathrm{a} = 0 = \mathrm{x}_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Contoh

Perkirakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}+1$, sumbu X, garis $x = 0$ dan garis $x = 2$ menggunakan 4,8,10, 20, dan 100 persegipanjang yang lebar tiap persegipanjang dibuat sama!

Penyelesaian:

Persoalan tersebut bisa diselesaikan dengan membagi interval [0,2] menjadi 4 persegipanjang, 8 persegipanjang, dan seterusnya, berdasarkan yang sudah dipelajari sebelumnya. Cara lain bisa dilakukan dengan tidak menyelesaikannya untuk setiap 4,8, atau jumlah persegipanjang berapapun satu demi satu, tapi dilakukan dengan menyelesaikan persoalan secara umum, yaitu untuk sejumlah n persegipanjang.

Misalkan interval [a,b]=[0,2] dibagi menjadi n subinterval yang setiap subintervalnya dibuat sama besar, yaitu $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$.

Berdasarkan pembagian tersebut diperoleh:

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = a + 1.\Delta x = 0 + 1.\frac{2}{n} = 1.\frac{2}{n}$$

$$x_2 = a + 2.\Delta x = 0 + 2.\frac{2}{n} = 2.\frac{2}{n}$$

$$x_3 = a + 3.\Delta x = 0 + 3.\frac{2}{n} = 3.\frac{2}{n}$$

…………………..

$$x_i = a + i.\Delta x = 0 + i.\frac{2}{n} = i\frac{2}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{i-1} = a + (\mathrm{i}-1).\Delta x = 0 + (\mathrm{i}-1).\frac{2}{n} = (\mathrm{i}-1).\frac{2}{n}$$

$$x_n = a + n.\Delta x = 0 + n.\frac{2}{n} = 2 = b\ .$$

Selanjutnya, untuk setiap suninterval $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ diambil $\overline{x}_i = x_i$, sehingga

$$f(x_i) = 2x_i + 1 = 2\frac{2i}{n} + 1 = \frac{4i}{n} + 1\,.$$

Luas $A_i = f(x_i)\Delta x$

Akibatnya,

Luas $A \approx \sum_{i=1}^{n} A_n$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n} + 1\right)\frac{2}{n}$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}+1\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i}{n^2}+\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{8i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$

$$= \frac{8}{n^2}.\frac{n^2+n}{2}+2 = \frac{4n^2+4n}{n^2}+2 = 4+\frac{4}{n}+2 = 6+\frac{4}{n}$$

Diperoleh $A \approx A_n = 6+\frac{4}{n}$.

Untuk menjawab persoalan menentukan luas suatu daerah yang sebenarnya dilakukan dengan cara mengambil banyaknya n yang sangat besar yang dalam matematika berarti $n \to \infty$. Karena pengambilan yang demikian, maka di dalam matematika proses tersebut melibatkan konsep limit. Secara umum, jika diambil banyaknya interval $n \to \infty$ maka jumlahan Riemann baik jumlahan Riemann Kanan, Jumlahan Rieman Tengah, maupun Jumlahan Riemann Kiri akan menjadi integral Riemann.

Integral Rieman (Integral Tentu)

Definisi: integral tentu

Diberikan fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada suatu interval tertutup $[a,b]$. Jika nilai dari

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

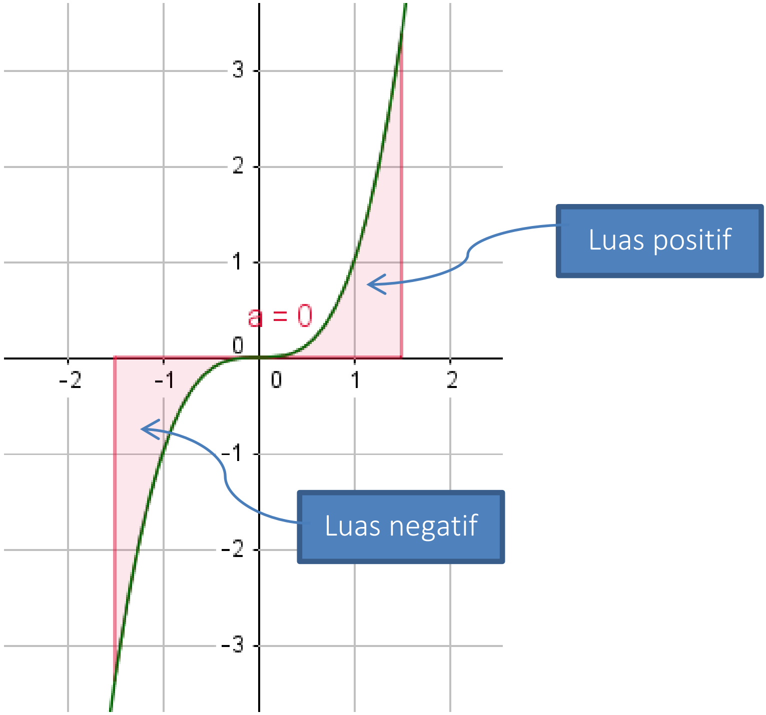
ada, maka fungsi $f(x)$ dikatakan terintegral pada $[a,b]$.

Selanjutnya $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (atau integral Riemann) fungsi f dari a sampai b dengan:

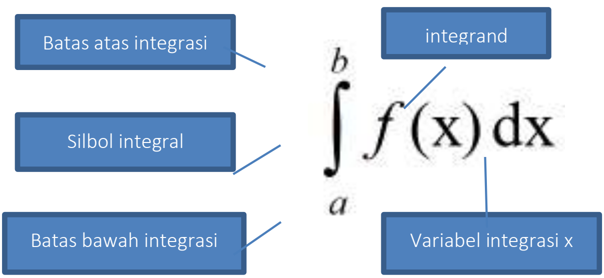
$$\int_a^x f(\mathrm{t})dt = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \ .$$

Bagian utama dari definisi terletak pada baris terakhir. Konsep yang tertulis dalam definisi tersebut muncul dari kajian mengenai pendekatan luas suatu daerah. Pada sisi lain, kurva suatu fungsi tidak selalu berada diatas sumbu X, sehingga konstruksi luas daerah dengan pendekatan menggunakan persegipanjang-persegipanjang kecil bisa menghasilkan nilai f yang negatif. Akibatnya secara keseluruhan jumlah mempunyai nilai yang negatif. Jika hal tersebut dikaitkan dengan luas suatu daerah maka akan muncul ketidaksesuaian karena luas yang bernilai negatif.

Secara umum, $\int_a^b f(x)dx$ menyatakan tanda luasan suatu daerah yang berada diantara kurva $y = f(x)$ dan sumbu X dan sepanjang interval [a,b]. Tanda positif luasan positif menyatakan bahwa luasan berada dibawah kurva $y = f(x)$ dan di atas sumbu X, sedangkan tanda luasan negative menyatakan bahwa luasan tersebut berada di atas kurva $y = f(x)$ dan di bawah sumbu X.



Berkaitan dengan symbol integrasi,



Pada simbol tersebut, batas integrasi selalu diasumsikan $a < b$.

Sifat-sifat Integral Tentu

Jika dibuat asumsi $a < b$, maka

a. Batas integrasi: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Contoh:

$$\int_0^2 x^2 dx = -\int_2^0 x^2 dx$$

b. Interval dengan lebar nol: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Contoh: $\int_4^4 \sqrt{x}dx = 0$; karena lebar intervalnya 0 maka integrasinya bernilai 0.

c. Perkalian dengan konstanta : $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Contoh: $\int_0^2 3x^2 dx = 3\int_0^2 x^2 dx$

d. Jumlahan dan selisih :

$$\int_a^b \left(f(x) + \mathrm{g(x)} \right) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

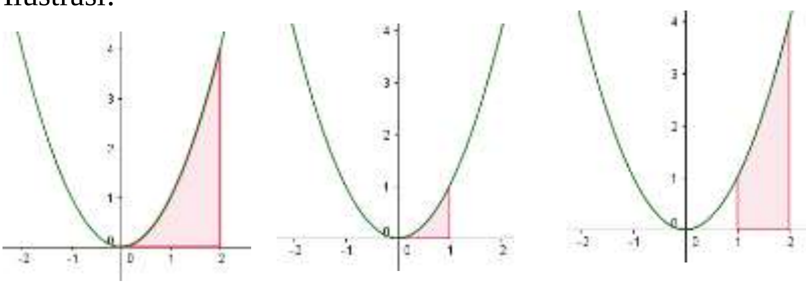
Contoh: $\int_0^2 \left(x^2 + \sqrt{x} \right) dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \sqrt{x} dx$

e. Sifat aditif :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Contoh: $\int_0^2 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx$

Ilustrasi:



Pertidaksamaan maksimum-minimum : jika fungsi f mempunyai nilai maksimum $f_{\max}$ dan nilai minimum $f_{\min}$ pada interval tertutup $\left[a,b\right]$, maka

$$f_{\min}.(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f_{\max}.(\mathrm{b}-\mathrm{a})$$

Sifat berkaitan domain:

Jika $f(\mathrm{x}) \leq \mathrm{g}(\mathrm{x})$ pada $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ maka $\int_a^b f(\mathrm{x})dx \leq \int_a^b g(\mathrm{x})dx$

Jika $f(\mathrm{x}) \geq 0$ pada $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ maka $\int_a^b f(\mathrm{x})dx \geq 0$

Berdasarkan definisi integral tentu, bisa dikenali fungsi-fungsi mana saja yang terintegral pada suatu integral tertutup $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. Teorema berikut ini memberikan klasifikasi jenis fungsi yang terintegral pada suatu interval tertutup.

Teorema: teorema keterintegralan

Jika suatu fungsi f terbatas pada suatu interval tertutup [a,b] dan dan fungsi f kontinu pada [a,b] kecuali pada berhingga titik pada [a,b] maka fungsi f terintegral pada [a,b].

Sebagai tambahan, jika fungsi f kontinu pada semua titik pada [a,b] maka fungsi f terintegral pada [a,b].

Berdasarkan teorema tersebut maka:

a. Fungsi polynomial

   Fungsi polynomial merupakan suatu fungsi kontinu pada semua bilangan real sehingga fungsi polynomial merupakan fungsi yang terintegral pada sebarang [a,b] untuk setiap a dan b bilangan real.

b. Fungsi sinus dan kosinus

   Fungsi sinus dan kosinus juga merupakan fungsi yang kontinu untuk semua titik anggota bilangan real sehingga fungsi sinus dan kosinus merupakan fungsi yang terintegral pada sebarang [a,b].

c. Fungsi rasional

   Fungsi rasional merupakan fungsi yang kontinu pada setiap titik kecuali pada titik-titik yang menyebabkan penyebutnya bernilai nol, sehingga fungsi rasional merupakan fungsi yang terintegral pada sebarang interval [a,b] asalkan tidak memuat penyebut bernilai nol untuk sebarang nilai pada interval tersebut.

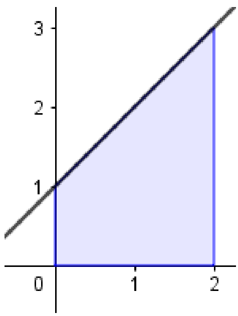
Menghitung Integral Tentu

Menentukan nilai dari $\int_0^2 (x+1)dx$!

Penyelesaian:

Langkah 1: membuat sketsa fungsi

Integrasi $\int_0^2 (x+1)dx$ berarti luasan yang dibatasi oleh garis $y = x+1$, sumbu X, garis $x = 0$ dan garis $x = 2$, berikut adalah sketsa luasan yang dimaksud.



Langkah 2: melakukan partisi interval [a,b]

Wilayah integrasinya adalah interval [0,2], sehingga partisi interval [0,2] dilakukan dengan membagi interval menjadi n subinterval sama besar dengan lebar setiap subinterval adalah $\Delta x_i = \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Untuk setiap subinterval $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ dengan $i = 1, 2, ..., n$. Selanjutnya dengan mengambil $\overline{x_i} = x_i$, diperoleh:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 + 1.\Delta x = 1.\Delta x = 1.\frac{2}{n}$$

$$x_2 = 0 + 2.\Delta x = 2.\Delta x = 2.\frac{2}{n}$$

$$x_3 = 0 + 3.\Delta x = 3.\Delta x = 3.\frac{2}{n}$$

…………………..

$$x_i = 0 + i.\Delta x = i.\Delta x = i.\frac{2}{n}$$

………………

$$x_{i-1} = 0 + (\text{i}-1).\Delta x = (\text{i}-1).\Delta x = (\text{i}-1).\frac{2}{n}$$

$$x_n = 0 + n.\Delta x = n.\Delta x = n.\frac{2}{n} = 2\ .$$

Lebih lanjut, $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}+1$ maka $f(\mathrm{x}_i) = \mathrm{x}_i + 1 = \left(i\frac{2}{n} \right) + 1$.

Langkah 3: menghitung luasan kecil

Untuk setiap $[x_{i-1}, x_i]$ dengan $\overline{x_i} = x_i$, satu luasan kecil A_i , jika setiap luasan kecil diasumsikan berbentuk persegipanjang maka luasan tersebut mempunyai luas pendekatan $A_i = f(\mathrm{x}_i)\Delta\,\mathrm{x}_i$.

Langkah 4: menjumlahkan luasan kecil

Luas pendekatan A_n diperoleh dari menjumlahkan A_i untuk

$i = 1, 2, ..., n$, yaitu $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i)\Delta\,\mathrm{x}_i$.

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n} + 1 \right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\frac{2}{n} + \sum_{i=1}^{n}1.\frac{2}{n} = 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

$$A_n = 4\left(\frac{n(\mathrm{n}+1)}{2n^2} \right) + \frac{2}{n}.1.n = 2\left(\frac{n^2+n}{n^2} \right) + 2$$

Langkah 5: menentukan limit jumlahan

Selanjutnya jika diambil n yang sangat besar maka $A_n \to A$, yaitu:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)+2\right) = 2.1+2 = 4$$

Latihan

Selesaikan bentuk integral berikut ini dengan menggunakan definisi!

1. $\int_0^5 (x+1)dx$
2. $\int_{-2}^1 \left(2x+1\right)dx$
3. $\int_{-2}^1 \left(3x^2+2\right)dx$
4. $\int_{-10}^{10} \left(x^2+x\right)dx$
5. $\int_0^5 (x-1)dx$
6. $\int_2^5 (-x+1)dx$
7. $\int_{-1}^5 (-x^2+1)dx$

8. $\int_{-1}^{2} 3x\,dx$

9. $\int_{-3}^{-1} (2x+1)dx$

10. $\int_{0}^{5} (-x^3-2)dx$

Teorema Fundamental Kalkulus

Teorema nilai rata-rata untuk integral

Teorema: jika fungsi f kontinu pada interval tertutup $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, maka untuk suatu $\mathrm{c} \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$ berlaku:

$$f(\mathrm{c}) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

Teorema tersebut bisa juga dituliskan dalam bentuk

$$f(\mathrm{c})\left(b-a\right) = \int_{a}^{b} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

Sisi kanan persamaan menyatakan luas suatu daerah yang dibatasi oleh sumbu X, kurva $y = f(x)$, garis $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ dan garis

$x = b$. Sisi kiri persamaan merupakan suatu persegipanjang dengan panjang $f(c)$ dan lebarnya adalah $(b-a)$.

Nilai dari $(b-a)$ sudah bisa ditentukan, sedangkan nilai $f(c)$ masih belum bisa ditentukan karena masih harus ditemukan terlebih dahulu nilai c nya.

Teorema tersebut bisa diartikan sebegai berikut. Luas daerah yang dinyatakan oleh bentuk $\int_a^b f(x)\,dx$, besarnya akan sama dengan luas suatu persegipanjang yang lebarnya adalah $(b-a)$ dan panjangnya adalah $f(c)$, untuk suatu nilai c yang berada pada interval [a,b].

Teorema Fundamental I Kalkulus

Teorema fundamental I Kalkulus menyatakan hubungan antara integral tentu dan turunan.

Teorema: jika fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$, maka $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ kontinu pada $[a,b]$ dan diferensiabel pada (a,b) dan derivatifnya dinyatakan oleh:

$$F'(\mathrm{x}) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = f(\mathrm{x})$$

Penggunaan teorema fundamental I

Contoh

Gunakan teorema fundamental I Kalkulus untuk menentukan $\frac{dy}{dx}$ dari:

a. $\mathrm{y} = \int_a^x (t+1)\,dt$

c. $y = \int_2^{x^2} t\,dt$

b. $y = \int_x^3 2t \sin t\,dt$

d. $y = \int_{1+3x^2}^{4} \frac{1}{1+e^t}\,dt$

Penyelesaian:

Berdasarkan teorema fundamental I untuk Kalkulus maka soal-soal tersebut memerlukan modifikasi supaya secara struktur bisa mengikuti bentuk dan aturan dalam teorema tersebut.

a. $\frac{d}{dx}\int_a^x (t+1)\,dt = (\mathrm{x}+1)$

b. $y = \int_x^3 2t \sin t\,dt$

Berdasarkan teorema fundamental I bisa diambil

$f(\mathrm{t}) = 2\,\mathrm{t}.\sin(\mathrm{t})$

Selanjutnya $y = \int_x^3 2t\sin t dt = -\int_3^x 2t\sin t dt$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\int_3^x 2t\sin t dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_3^x 2t\sin t dt\right) = -2x\sin(x)$$

c. $y = \int_2^{x^2} t dt$

Pada soal tersebut, batas atas integrasi bukan x tapi x^2. Supaya selaras dengan teorema fundamental I maka perlu dilakukan substitusi yaitu misalkan dengan mengambil $u = x^2$.

Soal akan menjadi $y = \int_2^u t dt = y(\mathrm{u})$

Menurut teorema fundamental I diperoleh :

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\int_2^u t dt = u$$

Sementara:

$$u = x^2 \text{ atau } \frac{du}{dx} = 2x$$

Berdasarkan aturan rantai diperoleh:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=u.2x=x^2.2x=2x^3$$

Akibatnya:

$$\frac{d}{dx}\int_2^{x^2} tdt=2x^3$$

d. $y=\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{1+e^t}dt$

Sebelumnya,

$$y=\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{1+e^t}dt=-\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{1+e^t}dt=\int_4^{u}\frac{1}{1+e^t}dt=y(u)$$

$$\frac{dy}{du}=-\frac{1}{1+e^u}$$

Misalkan diambil substitusi:

$$y=1+3x^2 \text{ dengan } \frac{dy}{dx}=6x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+e^u}.6x = -\frac{6x}{1+e^{1+3x^2}}$$

Kesimpulannya $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1+3x^2}^{4} \frac{1}{1+e^t}\,dt = -\frac{6x}{1+e^{1+3x^2}}$

Teorema Fundamental II Kalkulus

Teorema fundamental II Kalkulus menyatakan hubungan antara integral tentu dengan integral tak tentu.

Teorema: jika fungsi f kontinu pada setiap titik pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ dan jika F adalah integral tak tentu f pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental II Kalkulus mengatakan bahwa untuk menghitung nilai integral tentu fungsi f pada interval [a,b] maka cukup melakukan:

1. Menentukan integral tak tentu F atas f dan
2. Menghitung $F(b) - F(a)$, yang nilainya sama dengan $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Penghitungan nilai integral tentu menggunakan teorema fundamental II Kalkulus menjadi jauh lebih mudah daripada menggunakan jumlahan Riemann. Kelebihan dari teorema fundamental II Kalkulus terletak pada kemudahan menghitung nilai integral tentu yang didefinisikan dengan suatu proses yang cukup kompleks, ternyata bisa dihitung hanya dengan menghitung nilai integral tak tentu di titik b dikurangi dengan nilai integral tak tentu di titik a.

Contoh:

Pada pembahasan sebelumnya diperoleh bahwa $\int_0^2 (x+1)dx = 4$.

Selanjutnya jika proses menentukan luas daerah tersebut menggunakan teorema fundamental II untuk kalkulus diperoleh:

$$\int_0^2 (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x\Big|_0^2 = \left(\frac{1}{2}.2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{2}.0^2 + 0\right) = 4 - 0 = 4$$

Hasil akhir dari integrasi tersebut baik menggunakan definisi integral tentu maupun menggunakan teorema fundamental II adalah sama. Pada kedua proses penyelesaian tersebut tampak jelas terlihat bahwa integrasi menggunakan teorema fundamental II lebih praktis dalam memberikan hasil.

Hubungan Antara Integrasi dan Turunan

Pada teorema fundamental I yang bisa dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\mathrm{t})dt = f(x)$$

bisa diberi makna sebagai jika suatu fungsi diintegrasikan dan selanjutnya diturunkan maka yang diperoleh adalah fungsi itu kembali. Sekilas mirip dengan mengganti b dengan x dan mengganti x dengan t.

Demikian juga dengan fungsi berikut ini,

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

Jika fungsi F tersebut diturunkan dan selanjutnya menentukan turunannya, maka yang diperoleh adalah fungsi F (dengan menambahkan suatu konstanta). Paparan tersebut mengatakan bahwa proses integrasi dan turunan “saling invers”. Teorema fundamental juga juga mengatakan bahwa setiap fungsi yang kontinu f mempunyai integral tak tentu F. hal tersebut menunjukkan pentingnya menentukan integral tak tentu untuk menghitung integral tentu. Lebih lanjut, jika suatu persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(\mathrm{x})$ mempunyai penyelesaian $y = F(\mathrm{x}) + \mathrm{C}$ untuk suatu fungsi kontinu f dan kontanta C.

Latihan

Gunakan teorema fundamental I untuk menentukan turunan dari fungsi berikut ini:

1. $g(\mathrm{x}) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$
2. $g(\mathrm{y}) = \int_0^y t^2 \sin t\,dt$
3. $g(\mathrm{x}) = \int_x^\pi \sqrt{1+\sec t}\,dt$
4. $\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$
5. $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \int_2^{\frac{1}{x}} \arctan t\,dt$

Luas daerah

Luas di bawah kurva (sebagai integral tentu)

Definisi: jika $y = f(\mathrm{x})$ nonnegatif dan terintegral pada interval tertutup $[a,b]$ maka luas daerah di bawah kurva $y = f(\mathrm{x})$ dari $x = a$ sampai $x = b$

$$\text{Luas} = \int_a^b f(x)dx$$

Definisi tersebut mengatakan bahwa kita bisa menggunakan integral untuk menghitung luas dan kita bisa menggunakan luasan untuk menghitung integral.

Contoh

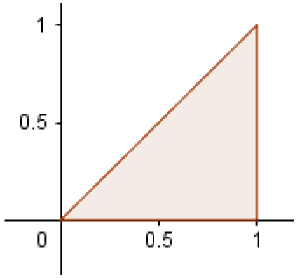
Luas di bawah kurva $f(x) = x$

Hitunglah:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx$$

Penyelesaian:

Sketsa dari luasan tersebut adalah:



Daerah yang dimaksud pada persamaan integral merupakan suatu segitiga siku siku. Luas daerah tersebut jika dihitung menggunakan formula luas segitiga adalah:

$$A = \frac{1}{2}.a.t$$

$$A = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$$

Jadi luasnya adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.

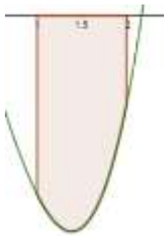
Selanjutnya dengan formulasi integral maka luasnya adalah:

$$A = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2}$$

Jadi luasnya adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.

Luas Daerah di atas Kurva f dan di bawah Sumbu X

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$ yang didefinisikan pada interval $[1,2]$. Luas daerah yang dibatasi oleh fungsi dengan sumbu X ternyata berupa daerah yang terletak dibawah sumbu X dan di atas fungsi f.



Luas daerah tersebut bisa dinyatakan dalam bentuk integrasi yaitu

$$\int_1^2 \left(x^3 - x^2 - 3x + 1\right) dx\,.$$

Selanjutnya untuk mengetahui luas daerah tersebut cukup menyelesaikan bentuk integrasi tersebut menggunakan teorema fundamental II kalkulus.

Penyelesaian:

Luas daerah tersebut adalah

$$-\int_{1}^{2}\left(x^3-x^2-3x+1\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\ \Big|_1^2\right)$$

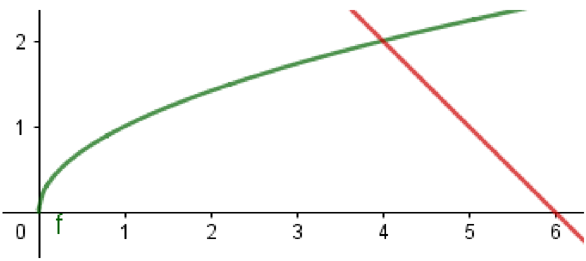
$$=-\left(\frac{1}{4}2^4-\frac{1}{3}2^3-\frac{3}{2}2^2+2\right)+\left(\frac{1}{4}1^4-\frac{1}{3}1^3-\frac{3}{2}1^2+1\right)$$

$$=-\left(4-\frac{8}{3}-6+2\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=-\left(-\frac{8}{3}\right)+\left(-\frac{7}{12}\right)=\frac{32}{12}-\frac{7}{12}=\frac{25}{12}=2,25$$

Daerah di antara Dua Kurva

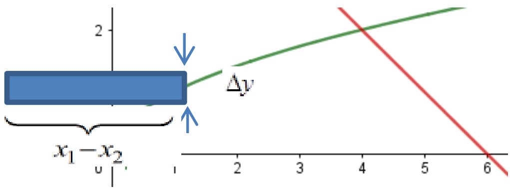
Daerah di antara dua kurva atau lebih merupakan suatu daerah yang dibatasi oleh dua kurva atau lebih. Berikut adalah contoh suatu daerah yang dibatasi oleh tiga kurva yaitu kurva $y=\sqrt{x}$, garis $y=-x+6$, dan sumbu X.



Menentukan luas daerah tersebut bisa dilakukan dengan menggunakan integral. Proses untuk menentukan bentuk integral dari daerah tersebut bisa dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan membuat asumsi persegipanjang yang dibuat secara horizontal dan potongan secara vertikal.

Potongan secara horizontal

Jika luasan tersebut dipotong menjadi persegipanjang-persegipanjang kecil maka akan diperoleh berikut ini.



Luas daerah tersebut dipotong secara horizontal sehingga diperoleh persegipanjang-persegipanjang yang lebarnya adalah Δy dan panjangnya adalah $x_1 - x_2$. Luas satu persegipanjang adalah $A_i = (x_1 - x_2)\Delta y$ dengan $x_1 = 6 - y$ dan $x_2 = y^2$. Jika diasumsikan setiap persegipanjang dibuat sama diperoleh bahwa :

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \left(x_1 - x_2\right)\Delta y$$
$$= \left(\left(6 - y\right) - y^2\right)\Delta y$$
$$= \left(6 - y - y^2\right)\Delta y$$

Langkah selanjutnya adalah mengintegralkan persamaan tersebut dari batas bawah y hingga batas atas y. batas ditentukan dengan menyamakan kedua persamaan baik dalam x maupun dalam y.

$$y^2 = 6 - y$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(\mathrm{y} + 3)(\mathrm{y} - 2) = 0$$

$$y_1 = -3 \quad \text{atau} \quad y_2 = 2$$

Berdasarkan sketsa sebelumnya maka diperoleh batas integrasinya adalah $y = 0$ sampai $y = 2$, sehingga diperoleh luasnya adalah:

$$A = \int_0^2 \left(6 - y - y^2\right) dy$$

$$A = 6y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^2$$

$$A = \left(6.2 - \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{3}2^3\right) - \left(6.0 - \frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{3}0^3\right)$$

$$A = \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - (0)$$

$$A = \left(10 - \frac{8}{3}\right)$$

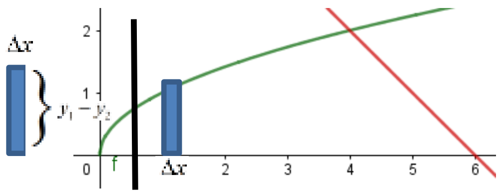
$$A = \frac{30 - 8}{3}$$

$$A = \frac{22}{3}$$

Diperoleh bahwa luas daerah tersebut adalah $\frac{22}{3}$ satuan luas.

Pendekatan lain juga bisa dilakukan dengan memotong luasan tersebut secara vertikal. Berikut adalah ilustrasi dan prosesnya.

<u>Potongan secara vertikal</u>



Potongan vertikal pada luasan tersebut jika dilakukan maka akan mendapatkan suatu luasan yang pada batas tertentu mempunyai batas fungsi yang berbeda sehingga harus dilakukan pembatasan pada wilayah pemotongan yang mempunyai fungsi yang berbeda.

Batas atas fungsi terbagi menjadi dua yaitu pada wilayah [0,4] batas atasnya adalah fungsi $y=\sqrt{x}$ dengan batas bawah sumbu X, sedangkan pada interval [4,6] batas atasnya adalah fungsi $y=-x+6$ sedangkan batas bawahnya adalah sumbu X. Selanjutnya formula integrase pada masing-masing interval dilakukan dengan cara berikut ini.

Pada interval [0,4] luas satu persegipanjang dinyatakan oleh :

$$A_i=\left(y_1-y_2\right)\Delta x=\left(\sqrt{x}-0\right)\Delta x=\sqrt{x}\Delta x$$

Selanjutnya, pada interval [4,6] luas satu persegipanjang dinyatakan oleh:

$$A_j=\left(y_1-y_2\right)\Delta x=\left(\left(-x+6\right)-0\right)\Delta x=\left(-x+6\right)\Delta x$$

Diperoleh formulasi integral untuk menyatakan luas daerah tersebut adalah:

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^6 \left(-x+6\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_4^6$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) + \left[\left(-\frac{1}{2}.6^2 + 6.6\right) - \left(-\frac{1}{2}.4^2 + 6.4\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}.8 + \left[18 - 16\right]$$

$$= \frac{16}{3} + 2$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{6}{3}$$

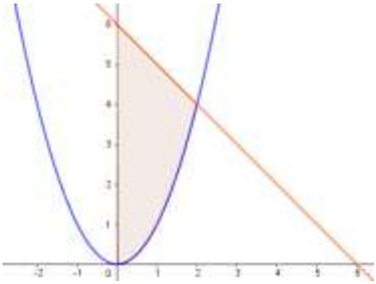
$$= \frac{22}{3}$$

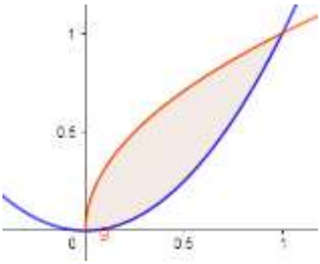
Diperoleh luas daerahnya adalah $\frac{22}{3}$ satuan luas.

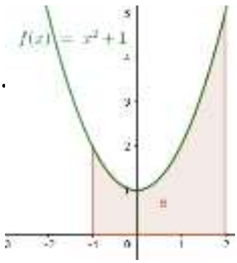
Berdasarkan hasil tersebut diperoleh bahwa proses menentukan integrasi tidak bergantung pada cara memotong luasan baik secara vertikal maupun secara horizontal. Proses integrasi menggunakan kedua potongan tersebut menghasilkan luas yang sama, dan memang demikian seharusnya.

Latihan

Tentukan luas daerah soal nomor 1 dan 2 berikut ini:

1. 

2. 

3. . 

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = (x-4)(x+2)$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 3$!

5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x} - 10$,

   $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 9$!

6. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = (x-3)(x+1)$

   dan $y = x$!

7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$,

   $y = x - 4$, $x = 0$!

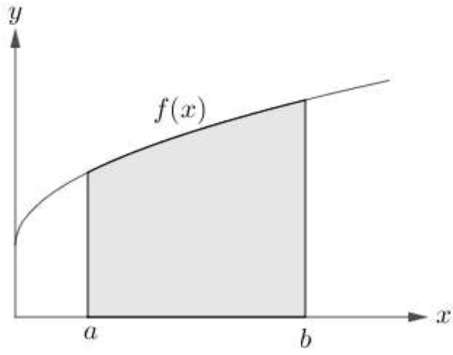
BAB III
VOLUME BENDA PUTAR

Pada Bab sebelumnya, kita telah mempelajari cara untuk menghitung luasan daerah di bawah kurva dengan konsep integral Riemman. Pada Bab ini akan dibahas mengenai cara menghitung volume benda putar dengan konsep integral Riemman. Benda putar yang dimaksud adalah benda yang terbentuk dari suatu luasan pada bidang koordinat kemudian diputar terhadap salah satu sumbu koordinat maupun diputar terhadap garis $x = k$ dan $y = k$. Ada dua metode yang dapat digunakan, yaitu metode cakram dan metode kulit tabung.

Metode Cakram

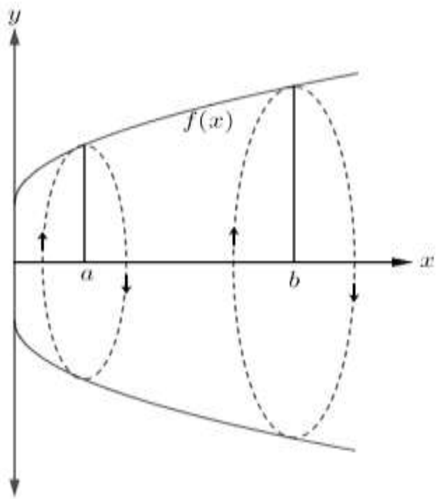
A. Rotasi Mengelilingi Sumbu X

Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh $f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan sumbu X seperti gambar di bawah ini.



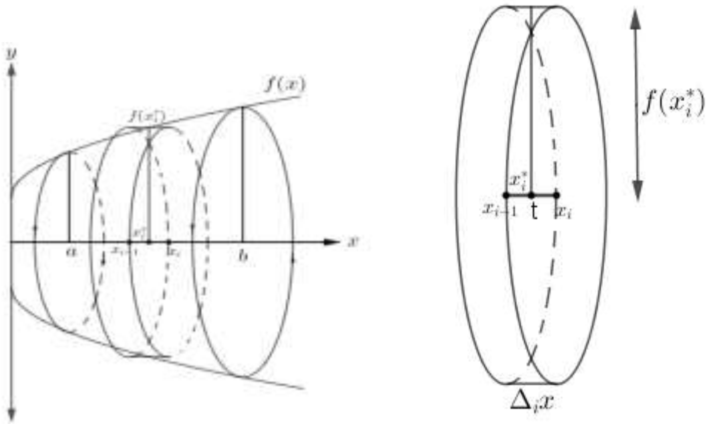
Gambar 1. Luasan pada bidang koordinat.

Luasan tersebut akan diputar terhadap sumbu X (Gambar).



Gambar 2. Benda hasil putaran sebuah luasan.

Sama seperti ketika kita menghitung luas dengan menggunakan integral, proses yang dilakukan adalah dengan mengambil partisi $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ pada $[a,b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik x_i* pada $[x_{i-1}, x_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(x_i*)$. Pendekatan volume pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(x_i*)$ kemudian diputar mengelilingi sumbu X.



Gambar 3. Irisan dari benda putar pada interval $[x_{i-1}, x_i]$.

Dari potongan tersebut diperoleh sebuah cakram berbentuk tabung (lihat gambar) dengan jari-jari $f(x_i*)$ dan tinggi $\Delta_i x$. Hal ini mengakibatkan volume dari cakram tersebut adalah $\pi(f(x_i^*))^2\Delta_i x$. Karena terdapat n partisi pada interval $[a,b]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_i^*))^2\Delta_i x$. Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi (f(x_i^*))^2 \Delta_i x.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

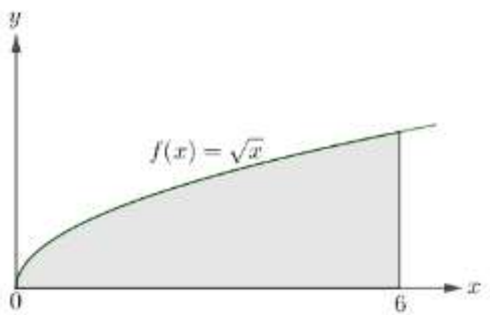
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas sumbu X dari $x = a$ sampai $x = b$ dan diputar mengelilingi sumbu X adalah

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = \sqrt{x}$ dan di atas sumbu X pada interval $[0,6]$ diputar mengelilingi sumbu X!

Penyelesaian :



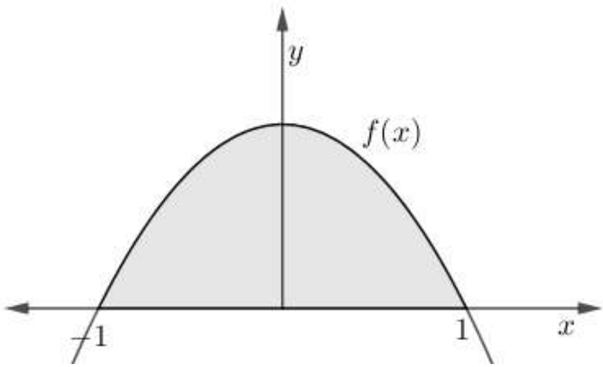
$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx = \pi\int_0^6 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^6 x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = 18\pi$$

Diperhatikan bahwa pada kasus tertentu tidak diberikan batasan untuk interval putarnya. Oleh karena itu kita perlu untuk mencari interval tersebut. Berikut diberikan contoh untuk kasus ini.

Contoh 2

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = 1 - x^2$ dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu X!

Penyelesaian :



Gambar

Pada kasus ini kita perlu mencari perpotongan dari fungsi f dan sumbu X, yaitu

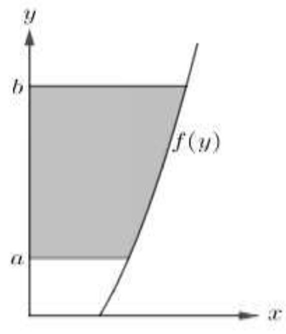
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, volume benda putar tersebut adalah

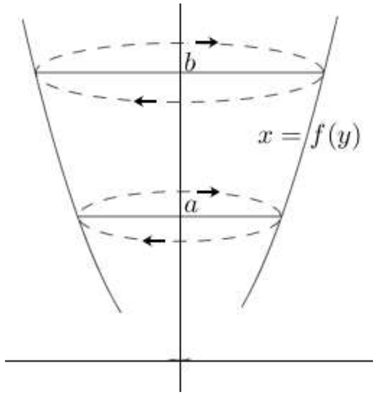
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b f(x)^2\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} 1 - 2x^2 + x^4\, dx \\
&= \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} \\
&= 1\frac{1}{15}\pi
\end{aligned}
$$

B. Rotasi Mengelilingi Sumbu Y

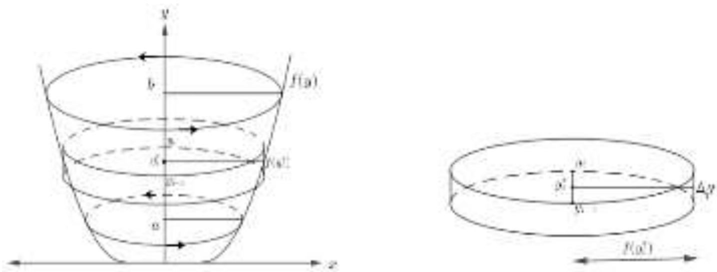
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh $f(\mathrm{y}),\ y = a,\ y = b,$ dan sumbu Y seperti gambar di bawah ini.



Luasan tersebut akan diputar terhadap sumbu Y.



Sama seperti ketika kita menghitung volume dari benda putar dari daerah yang diputar terhadap sumbu X dengan integral, proses yang dilakukan adalah dengan mengambil partisi $P = \{a = y_0, y_1, ..., y_n = b\}$ pada $[a, b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik $y_i *$ pada $[y_{i-1}, y_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(y_i *)$. Pendekatan volume pada interval $[y_{i-1}, y_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(y_i *)$ kemudian diputar mengelilingi sumbu Y.



Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah cakram berbentuk tabung (lihat gambar) dengan jari-jari $f(y_i *)$ dan tinggi $\Delta_i y$ Hal ini mengakibatkan volume dari cakram tersebut adalah $\pi(f(\mathrm{y}_i^*))^2 \Delta_i y$. Karena terdapat n partisi pada interval $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n} \pi(f(\mathrm{y}_i^*))^2 \Delta_i y.$ Volume dari benda putar tesebut akan terpebuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f(\mathrm{y}_i^*)\right)^2 \Delta_i y.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V = \pi \int_a^b f(\mathrm{y})^2 \, dy.$$

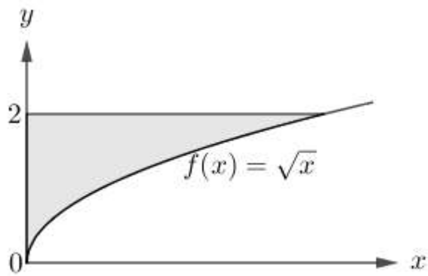
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di kiri kurva f dan di kanan sumbu Y dari $y = a$ sampai $y = b$ dan diputar mengelilingi sumbu X adalah

$$V = \pi \int_a^b f(\mathrm{y})^2 \, dy.$$

Contoh

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di kiri kurva $y = \sqrt{x}$ dan di kanan sumbu Y pada interval $[0,2]$ diputar mengelilingi sumbu Y!

Penyelesaian :

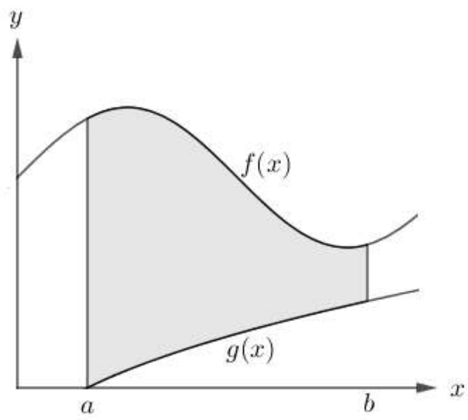


Pada contoh ini kita perlu mengubah fungsi $y = \sqrt{x}$ ke dalam bentuk $x = f(y)$, yaitu $x = y^2$. Oleh karena itu volume dari benda putar tersebut adalah

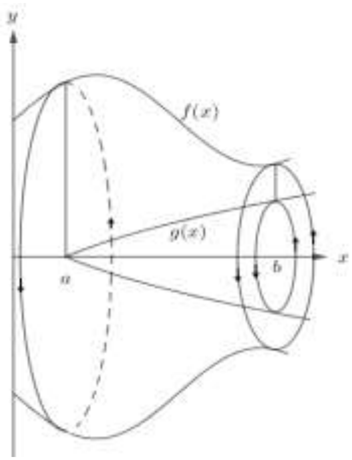
$$V = \pi \int_a^b f(\mathrm{y})^2\, dy = \pi \int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4\, dy = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

C. Volume Benda Putar di Antara Dua Kurva

Diperhatikan luasan yang dibatasi kurva f, kurva g, garis $x = a$ dan garis $x = b$ pada gambar di bawah ini. Diasumsikan fungsi f berada di atas fungsi g pada interval $[a,b]$.

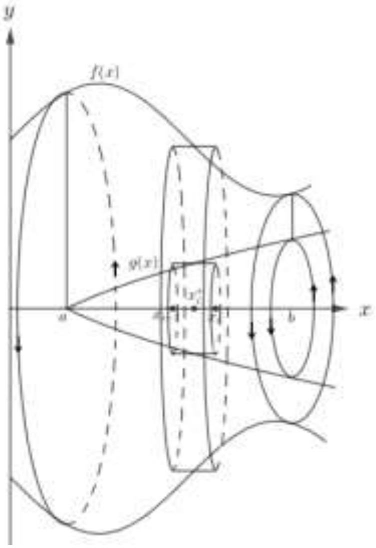


Luasan tersebut akan diputar terhadap sumbu Y.



Diambil sembarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ pada $[a, b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik $x_i *$ pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(x_i *)$ dan $g(x_i *)$. Perhitungan pendekatan volume di antara dua kurva pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ dilakukan dengan membuat dua buah persegi panjang dengan panjang $f(x_i*)$ dan $g(x_i*)$ kemudian diputar mengelilingi sumbu X.

Hasil dari benda putar tersebut diperoleh sebuah tabung berlubang (lihat gambar) dengan jari-jari luar $f(x_i*)$, jari-jari dalam $g(x_i*)$, dan tinggi $\Delta_i y$.



Hal ini mengakibatkan volume dari tabung berlubang tersebut adalah volume tabung luar dikurangi dengan volume tabung dalam, yaitu

$$\pi(f(x_i^*))^2 \Delta_i x - \pi(g(x_i^*))^2 \Delta_i x.$$

Karena terdapat n partisi pada interval $[a,b]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i^*)^2 \Delta_i x - \pi g(x_i^*)^2 \Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} \pi \left(f(x_i^*)^2 - g(x_i^*)^2 \right) \Delta_i x.$$

Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\left(f(\mathrm{x}_i^{\,*})^2 - \mathrm{g}(\mathrm{x}_i^{\,*})^2 \right)\Delta_i x.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V = \pi\int_a^b f(\mathrm{x})^2 - g(x)^2\,dx.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas kurva g dari $x=a$ sampai $x=b$ dan diputar mengelilingi sumbu X adalah

$$V = \pi\int_a^b f(\mathrm{x})^2 - g(x)^2\,dx.$$

Berikut ini adalah langkah untuk menghitung volume benda putar di antara 2 kurva :

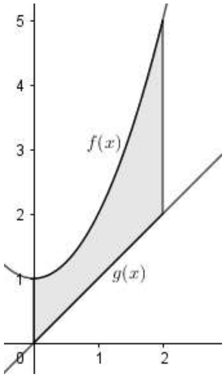
i. Buatlah sketsa grafik fungsinya
ii. Tentukan batas integralnya
iii. Perhatikan posisi fungsinya
iv. Integralkan untuk menghitung volumenya

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $g(x) = x$, $f(x) = x^2 + 1$, $x = 0$, dan $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu X!

Penyelesaian :

i. *Sketsa.*



ii. *Batas integral.*

Dari soal dan sketsa jelas bahwa batas integralnya $x = 0$ dan $x = 2$.

iii. *Posisi fungsi.*

Dari sketsa terlihat bahwa fungsi f berada di atas fungsi g. Hal ini menyebabkan kulit putaran dari fungsi f berada di luar kulit putaran dari fungsi g.

iv. *Perhitungan integral.*

$$V = \pi \int_a^b f(\mathrm{x})^2 - g(x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(x^2 + 1\right)^2 - \left(x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^4 + x^2 + 1 dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^2$$

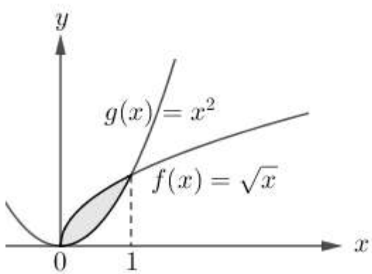
$$= 11\frac{1}{15}\pi$$

Contoh 2

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di antara kurva $f(x) = \sqrt{x}$ dan $f(x) = x^2$ diputar mengelilingi sumbu X!

Penyelesaian :

i. *Sketsa.*



ii. *Batas integral.*

Untuk mengetahui batas integralnya, kita perlu mencari absis dari titik potong kedua fungsi tersebut. Titik potong kurva tersebut terjadi ketika

$$
\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \sqrt{x} = x \\
&\Leftrightarrow x = x^4 \\
&\Leftrightarrow x^4 - x = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1
\end{aligned}
$$

Jadi batas integralnya adalah ketika $x = 0$ dan $x = 1$.

iii. *Posisi fungsi.*

Dari sketsa terlihat bahwa fungsi f berada di atas fungsi g. Hal ini menyebabkan kulit putaran dari fungsi f berada di luar kulit putaran dari fungsi g.

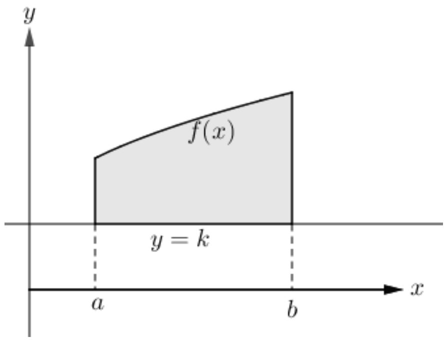
iv. *Perhitungan integral.*

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b f(\mathrm{x})^2 - g(x)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 x - x^4 dx
\end{aligned}
$$

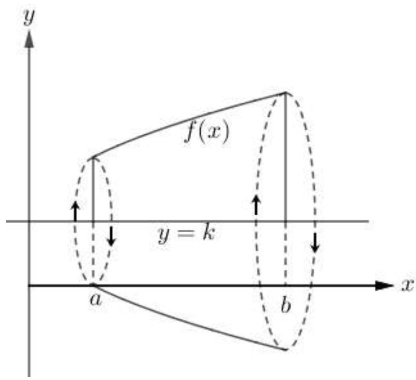
$$V=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{10}\pi$$

D. Rotasi Mengelilingi Garis $y=k$

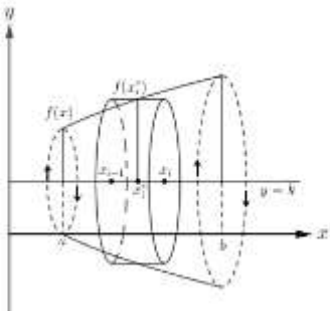
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva f, $x=a$, $x=b$, dan $y=k$ seperti gambar di bawah ini. Diasumsikan fungsi f berada di atas garis $y=k$

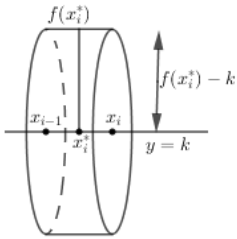


Luasan tersebut akan diputar terhadap garis $y=k$.



Diambil sembarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ pada $[a,b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik $x_i *$ pada $[x_{i-1}, x_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(x_i *)$. Pendekatan volume pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(x_i *)$ kemudian diputar mengelilingi garis $y = k$.





Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah cakram berbentuk tabung (lihat gambar) dengan jari-jari $f(x_i *) - k$ dan tinggi $\Delta_i x$. Hal ini mengakibatkan volume dari cakram tersebut adalah $\pi\left(f(x_i^*) - k\right)^2 \Delta_i x$. Karena terdapat n partisi pada interval $[a,b]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n} \pi\left(f(x_i^*) - k\right)^2 \Delta_i x.$ Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f(x_i^*) - k\right)^2 \Delta_i x.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) - \mathrm{k} \right)^2 \, dx.$$

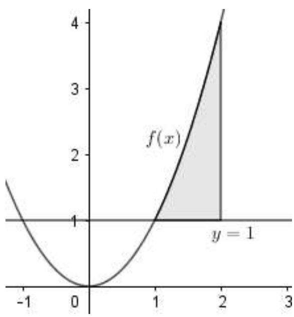
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas garis $y = k$ dari $x = a$ sampai $x = b$ dan diputar mengelilingi garis $y = k$ adalah

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) - \mathrm{k} \right)^2 \, dx.$$

Contoh

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = x^2$ dan di atas sumbu X untuk $x = 1$ sampai $x = 2$ diputar mengelilingi garis $y = 1$!

Penyelesaian :

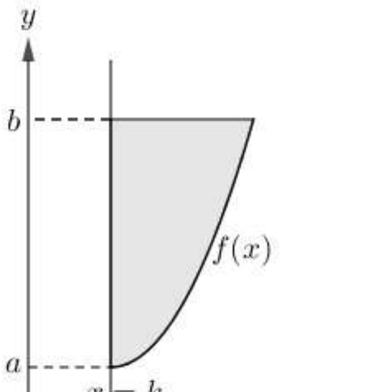


$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)-\mathrm{k}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2-1\right)^2dx$$

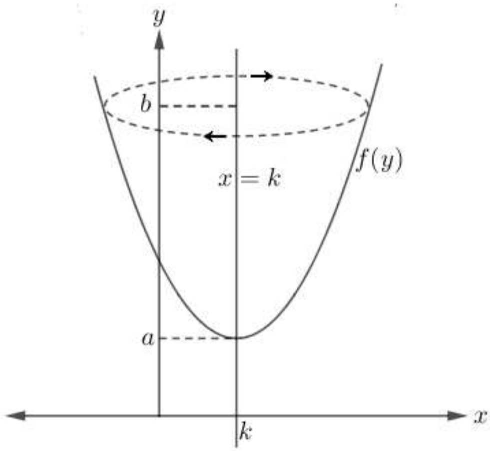
$$=\pi\int_1^2 x^4-2x^2+1dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_1^2=2\frac{8}{15}\pi$$

E. Rotasi Mengelilingi Garis $x=k$

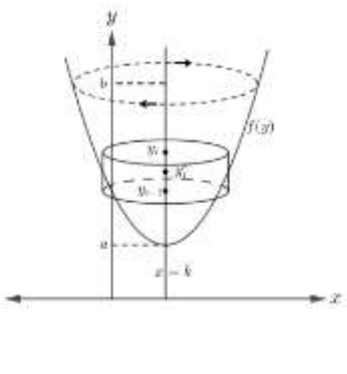
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva f, $y=a$, $y=b$, dan $x=k$ seperti gambar di bawah ini. Diasumsikan fungsi f berada di kanan garis $x=k$.

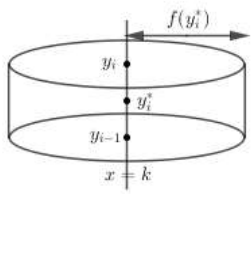


Luasan tersebut akan diputar terhadap garis $x=k$.



Diambil sembarang partisi $P = \{a = y_0, y_1, ..., y_n = b\}$ pada $[a, b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik $y_i *$ pada $[y_{i-1}, y_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(y_i *)$. Pendekatan volume pada interval $[y_{i-1}, y_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(y_i *)$ kemudian diputar mengelilingi garis $x = k$.





Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah cakram berbentuk tabung (lihat gambar) dengan jari-jari $f(\mathrm{y}_i\,*)-\mathrm{k}$ dan tinggi $\Delta_i\,\mathrm{y}$. Hal ini mengakibatkan volume dari cakram tersebut adalah $\pi\left(f(\mathrm{y}_i^{\,*})-\mathrm{k}\right)^2\Delta_i y$. Karena terdapat n partisi pada interval $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n}\pi\left(f(\mathrm{y}_i^{\,*})-\mathrm{k}\right)^2\Delta_i y.$ Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\left(f(\mathrm{y}_i^{\,*})-\mathrm{k}\right)^2\Delta_i y.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V=\pi\int_a^b\left(f(\mathrm{y})-\mathrm{k}\right)^2 dy.$$

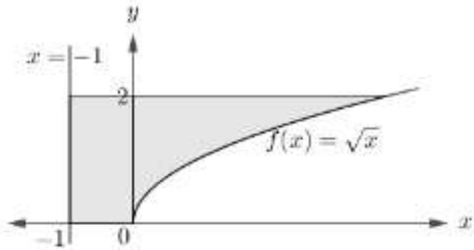
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas garis $x=k$ dari $y=a$ sampai $y=b$ dan diputar mengelilingi garis $x=k$ adalah

$$V=\pi\int_a^b\left(f(\mathrm{y})-\mathrm{k}\right)^2 dy.$$

Contoh

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y=\sqrt{x}$, sumbu Y, garis $y=2$, dan sumbu X diputar mengelilingi garis $x=-1$!

Penyelesaian :



Pada contoh ini kita perlu mengubah fungsi $y=\sqrt{x}$ ke dalam bentuk $x=f(y)$, yaitu $x=y^2$. Oleh karena itu volume dari benda putar tersebut adalah

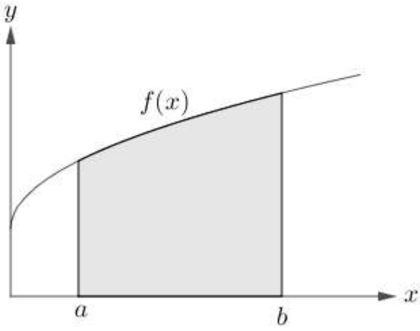
$$V=\pi\int_a^b \left(f(\mathrm{y})-\mathrm{k}\right)^2 dy=\pi\int_0^2 \left(y^2-(-1)\right)^2 dy$$

$$=\pi\int_0^2 y^4+2y^2+1\,dy=\pi\left[\frac{1}{5}y^5+\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^2=13\frac{11}{15}\pi$$

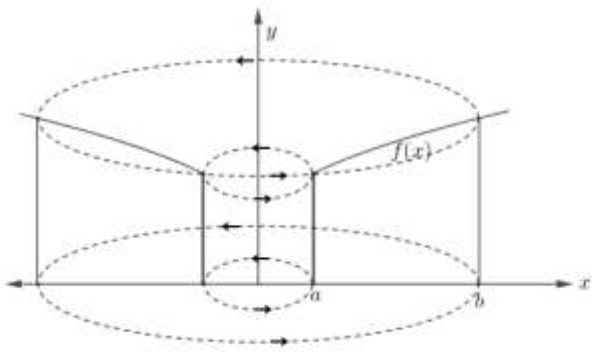
Metode Kulit Tabung

A. Rotasi Mengelilingi Sumbu Y

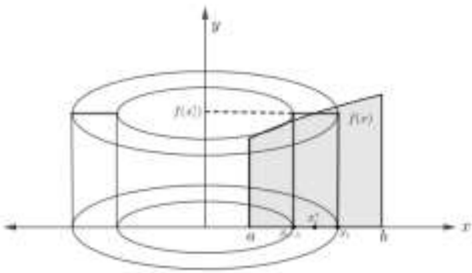
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva f, $x=a$, $x=b$, dan sumbu X seperti gambar di bawah ini.



Luasan tersebut akan diputar terhadap sumbu Y.



Diambil sembarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ pada $[a,b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik x_i^* pada $[x_{i-1}, x_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(x_i*)$. Pendekatan volume pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(x_i*)$ kemudian diputar mengelilingi sumbu Y.



Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah kulit tabung dengan jari-jari dalam x_{i-1}, jari-jari luar x_i dan tinggi $f(x_i*)$. Hal ini mengakibatkan volume dari kulit tabung tersebut adalah

$$\pi x_i^2 f(x_i^*) - \pi x_{i-1}^2 f(x_i^*) = \pi\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) f(x_i^*)$$
$$= \pi\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i + x_{i-1}\right) f(x_i^*).$$

Jika diambil $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ dan $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ maka volume tersebut menjadi $2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta_i x.$ Karena terdapat n partisi pada interval $[a,b]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta_i x.$ Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta_i x.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh $V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.$

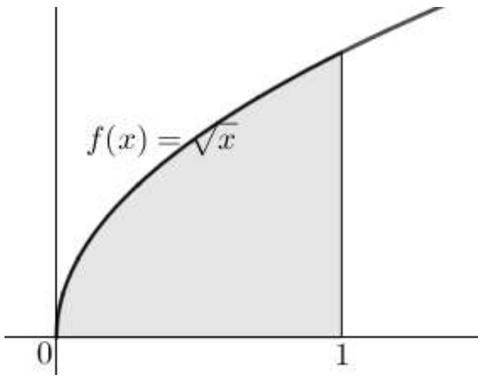
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas sumbu X dari $x = a$ sampai $x = b$ dan diputar mengelilingi sumbu Y adalah

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = \sqrt{x}$ dan di atas sumbu X pada interval $[0,1]$ diputar mengelilingi sumbu Y!

Penyelesaian :



$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi$$

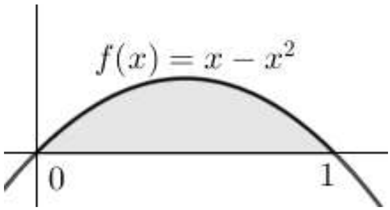
Contoh 2

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $f(x) = x - x^2$ dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu Y!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa untuk mengetahui batasan interval untuk integralnya, kita perlu mengetahui perpotongan antara $f(x)$ dan sumbu X. Hal ini terjadi ketika

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$



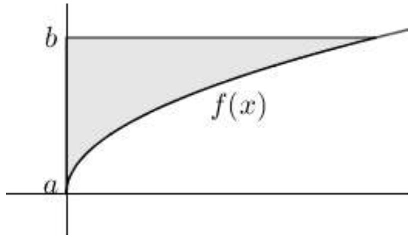
Oleh karena itu, volume benda putar tersebut adalah

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx = 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right)dx$$

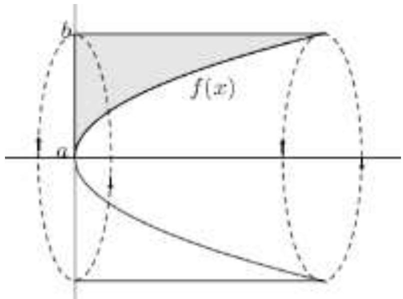
$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3\, dx = 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}\pi$$

B. Rotasi Mengelilingi Sumbu X

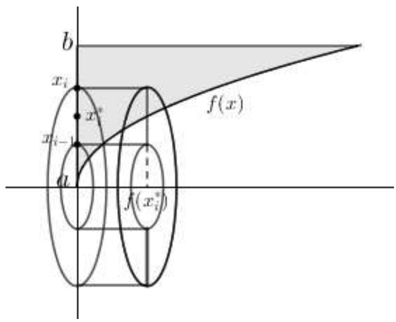
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva $f,\ y = a,\ y = b,$ dan sumbu Y seperti gambar di bawah ini.



Luasan tersebut akan diputar terhadap sumbu X.



Diambil sebarang partisi $P = \{a = y_0, y_1, ..., y_n = b\}$ pada $[a, b]$. Selanjutnya diambil sembarang titik $y_i *$ pada $[y_{i-1}, y_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(y_i *)$. Pendekatan volume pada interval $[y_{i-1}, y_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(y_i *)$ kemudian diputar mengelilingi sumbu X.



Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah kulit tabung (lihat gambar) dengan jari-jari dalam y_{i-1}, jari-jari luar y_i dan tinggi $f(\mathrm{y}_i{*})$. Hal ini mengakibatkan volume dari kulit tabung tersebut adalah

$$\pi y_i^2 f(\mathrm{y}_i^*) - \pi y_{i-1}^2 f(\mathrm{y}_i^*) = \pi\left(y_i^2 - y_{i-1}^2\right) f(\mathrm{y}_i^*)$$
$$= \pi\left(y_i - y_{i-1}\right)\left(y_i + y_{i-1}\right) f(\mathrm{y}_i^*).$$

Jika diambil $y_i^* = \dfrac{y_i + y_{i-1}}{2}$ dan $\Delta_i y = y_i - y_{i-1}$ maka volume tersebut menjadi $2\pi y_i^* f(\mathrm{y}_i^*)\Delta_i\,\mathrm{y}$. Karena terdapat n partisi pada interval $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i^* f(\mathrm{y}_i^*)\Delta_i\,\mathrm{y}$. Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i^* f(\mathrm{y}_i^*)\Delta_i\,\mathrm{y}.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh $V = 2\pi\int_a^b y\, f(\mathrm{y})\,dy.$

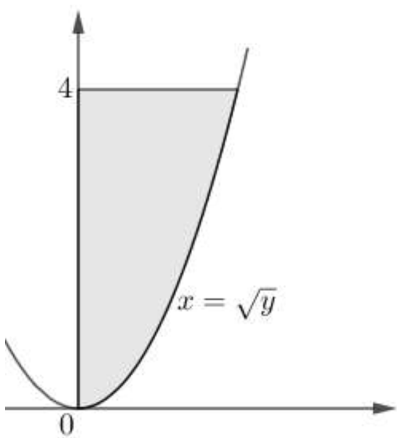
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di kanan sumbu Y dari $y = a$ sampai $y = b$ dan diputar mengelilingi sumbu Y adalah

$$V = 2\pi \int_a^b y\, f(\mathrm{y})\, dy.$$

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $g(x) = x^2$, sumbu Y, $y = 0$ dan $y = 4$ pada kuadran 1 diputar mengelilingi sumbu X!

Penyelesaian :



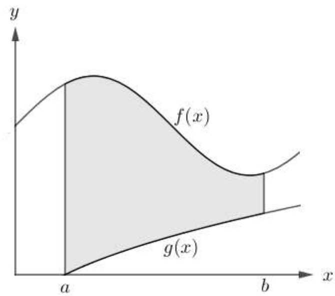
Pada contoh ini kita perlu mengubah fungsi $y = x^2$ ke dalam bentuk $x = f(y)$. Karena daerah tersebut di kuadran I, maka $x = \sqrt{y}$. Oleh karena itu volume dari benda putar tersebut adalah

$$V = 2\pi \int_a^b y f(\mathrm{y}) dy = 2\pi \int_0^4 y\sqrt{y}\, dx$$

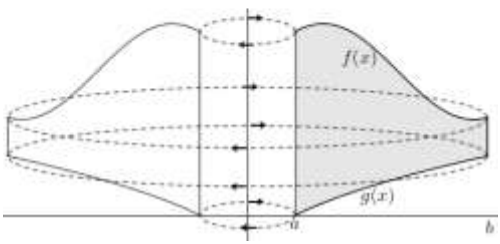
$$= 2\pi \int_0^4 y^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{128}{5}\pi.$$

C. Volume Benda Putar di Antara Dua Kurva

Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva $f,\ g, y = a,\ y = b,$ seperti gambar di bawah ini.

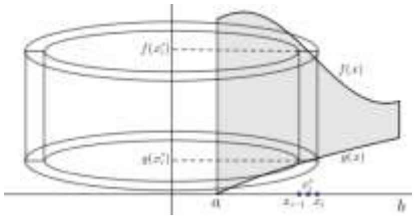


Diasumsikan fungsi f berada di atas fungsi g. Luasan tersebut akan diputar terhadap sumbu Y.



Diambil sembarang partisi $P = \{\mathrm{a} = x_0, \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n = \mathrm{b}\}$ pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Selanjutnya diambil sembarang titik x_i* pada interval

$[x_{i-1}, x_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(x_i*)$ dan $g(x_i*)$. Perhitungan pendekatan volume di antara dua kurva pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ dilakukan dengan membuat dua buah persegi panjang dengan panjang $f(x_i*)$ dan $g(x_i*)$ kemudian diputar mengelilingi sumbu Y. Hasil dari benda putar tersebut diperoleh kulit tabung dengan tinggi $f(x_i^*) - g(x_i^*)$.



Hal ini mengakibatkan volume dari kulit tabung yang dimaksud adalah

$$2\pi x_i^* \left(f(x_i^*) - g(x_i^*) \right) \Delta_i x \ .$$

Karena terdapat n partisi pada interval $[a, b]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \left(f(x_i^*) - g(x_i^*) \right) \Delta_i x.$$

Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \left(f(x_i^*) - g(x_i^*) \right) \Delta_i x.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V = 2\pi \int_a^b x\big(f(\mathrm{x}) - g(x)\big) dx.$$

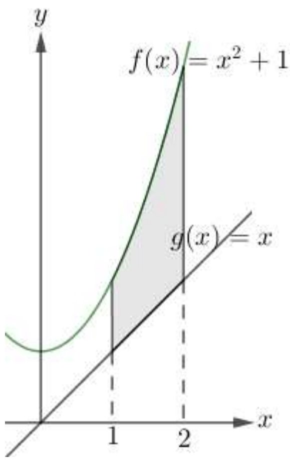
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas kurva g dari $x = a$ sampai $x = b$ dan diputar mengelilingi sumbu Y adalah

$$V = 2\pi \int_a^b x\big(f(\mathrm{x}) - g(x)\big) dx.$$

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 1$, dan $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu Y!

Penyelesaian :



Diperhatikan bahwa kurva $y = x^2 + 1$ berada di atas kurva $y = x$ pada interval tersebut. Oleh karena itu, volume benda putar tersebut adalah

$$V = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - \mathrm{g(x)} \right) dx = 2\pi \int_0^1 x\left(x^2 + 1 - x \right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 + x - x^2 \, dx = 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{6}\pi$$

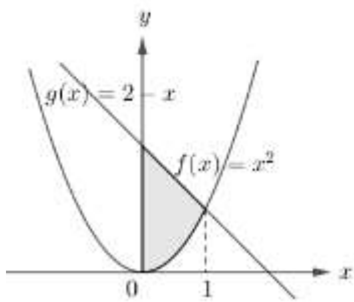
Contoh 2

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $y = x^2$, $y = 2 - x$, dan sumbu Y pada kuadran 1 diputar mengelilingi sumbu Y!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa untuk mengetahui batasan interval untuk integralnya, kita perlu mengetahui perpotongan antara kedua kurva tersebut. Hal ini terjadi ketika

$$x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2.$$



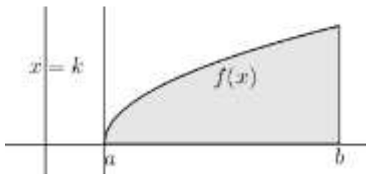
Karena berada di kuadran I, maka diambil $x=1.$ Selanjutnya, karena dibatasi oleh sumbu Y, maka batas interval daerah tersebut adalah $[0,1].$ Lebih lanjut dapat dicek bahwa kurva $y=2-x$ berada di atas kurva $y=x^2$ pada interval tersebut. Oleh karena itu, volume benda putar tersebut adalah

$$V=2\pi\int_a^b x\left(f(x)-\mathrm{g(x)}\right)dx=2\pi\int_0^1 x\left(2-x-x^2\right)dx$$

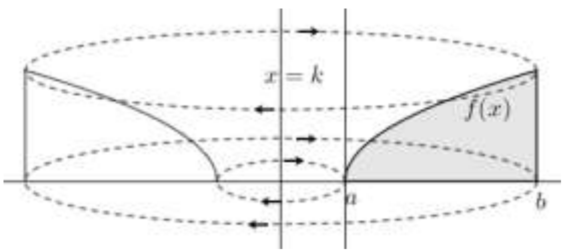
$$=2\pi\int_0^1 2x-x^2-x^3\,dx=2\pi\left[x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{5}{6}\pi$$

D. Rotasi Mengelilingi Garis $x=k$

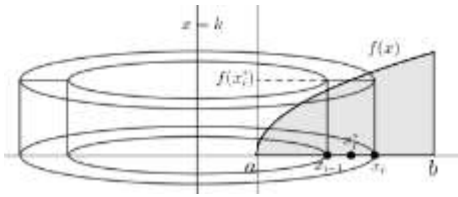
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva $f, x=a,\ x=b,$ seperti gambar di bawah ini.



Diasumsikan fungsi f berada di kanan garis $x=k.$ Luasan tersebut akan diputar terhadap garis $x=k$.



Diambil sembarang partisi $P=\{\mathrm{a}=\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n=\mathrm{b}\}$ pada $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. Selanjutnya diambil sembarang titik x_i* pada $[\mathrm{x}_{i-1},\mathrm{x}_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(x_i*)$. Pendekatan volume pada interval $[\mathrm{x}_{i-1},\mathrm{x}_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(x_i*)$ kemudian diputar mengelilingi garis $x=k$.



Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah kulit tabung (lihat gambar) dengan jari-jari dalam $x_{i-1}-k$, jari-jari luar x_i-k dan tinggi $f(x_i*)$. Hal ini mengakibatkan volume dari kulit tabung tersebut adalah

$$\begin{aligned}\pi(x_i-k)^2 f(x_i^*)-\pi(x_{i-1}-k)^2 f(x_i^*) &= \pi\left((x_i-k)^2-(x_{i-1}-k)^2\right)f(x_i^*)\\ &= \pi\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(x_i+x_{i-1}-2k\right)f(x_i^*).\end{aligned}$$

Jika diambil $x_i^*=\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}$ dan $\Delta_i x=x_i-x_{i-1}$ maka volume tersebut menjadi $2\pi(x_i^*-k)f(x_i^*)\Delta_i x.$ Karena terdapat n partisi pada interval $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n}2\pi(x_i^*-k)f(x_i^*)\Delta_i x..$ Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi(x_i^* - k)\, f(x_i^*)\Delta_i x..$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh $V = 2\pi\int_a^b (x-k)\, f(x)\, dx.$

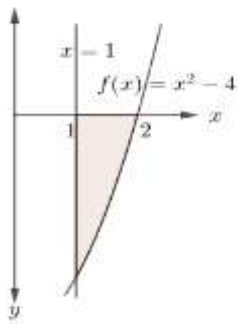
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di bawah kurva f dan di atas sumbu X dari $x = a$ sampai $x = b$ dan diputar mengelilingi garis $x = k$ adalah

$$V = 2\pi\int_a^b (x-k)\, f(x)\, dx.$$

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di atas kurva $y = x^2 - 4$ dan di bawah sumbu X pada interval $[1,2]$ diputar mengelilingi garis $x = 1$!

Penyelesaian :



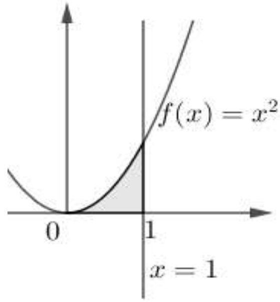
$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_a^b (x-k)\, f(x)\, dx \\
&= 2\pi\int_2^3 (x-1)\left(x^2-4\right) dx \\
&= 2\pi\int_2^3 x^3 - x^2 - 4x + 4\, dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_2^3 \\
&= 3\frac{11}{12}\pi
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu X, dan $x = 1$ diputar mengelilingi garis $x = 1$!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa untuk mengetahui batasan interval untuk integralnya, kita perlu mengetahui perpotongan antara kurva-kurva tersebut. Mudah didapahami bahwa daerah tersebut dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = 1$.



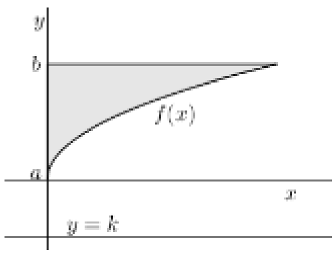
Diperhatikan pula bahwa sumbu putar berada di kanan luasan sehingga volume benda putar tersebut adalah

$$V = 2\pi \int_0^1 (k - x)\, f(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x) x^2 dx$$

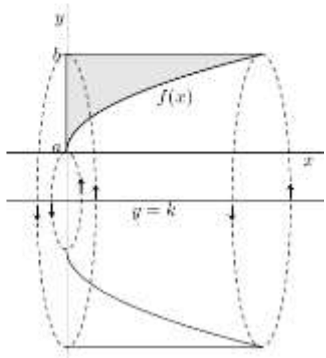
$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx = 2\pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{6}\pi$$

E. Rotasi Mengelilingi Garis $y = k$

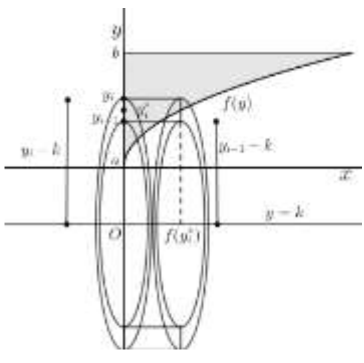
Diperhatikan luasan yang dibatasi oleh kurva f, $y = a$, $y = b$, seperti gambar di bawah ini.



Diasumsikan fungsi f berada di atas garis $y = k$. Luasan tersebut akan diputar terhadap garis $y = k$.



Diambil sembarang partisi $P = \{\mathrm{a} = \mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n = \mathrm{b}\}$ pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Selanjutnya diambil sembarang titik y_i * pada $[\mathrm{y}_{i-1}, \mathrm{y}_i]$ sehingga dapat ditentukan nilai $f(\mathrm{y}_i\,*)$. Pendekatan volume pada interval $[\mathrm{y}_{i-1}, \mathrm{y}_i]$ dilakukan dengan membuat sebuah persegi panjang dengan panjang $f(\mathrm{y}_i\,*)$ kemudian diputar mengelilingi garis $y = k$.



Dari putaran potongan tersebut akan diperoleh sebuah kulit tabung (lihat gambar) dengan jari-jari dalam $y_{i-1} - k$, jari-jari luar

$y_i - k$ dan tinggi $f(y_i*)$. Hal ini mengakibatkan volume dari kulit tabung tersebut adalah

$$\pi(y_i - k)^2 f(y_i^*) - \pi(y_{i-1} - k)^2 f(y_i^*) = \pi\left((y_i - k)^2 - (y_{i-1} - k)^2\right) f(y_i^*)$$
$$= \pi\left(y_i - y_{i-1}\right)\left(y_i + y_{i-1} - 2k\right) f(y_i^*).$$

Jika diambil $y_i^* = \dfrac{y_i + y_{i-1}}{2}$ dan $\Delta_i y = y_i - y_{i-1}$ maka volume tersebut menjadi $2\pi(y_i^* - k) f(y_i^*)\Delta_i y$. Karena terdapat n partisi pada interval $[a,b]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i^* - k) f(y_i^*)\Delta_i y$. Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i^* - k) f(y_i^*)\Delta_i y.$$

Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh $V = 2\pi\int_a^b (y - k)\, f(y)\, dy.$

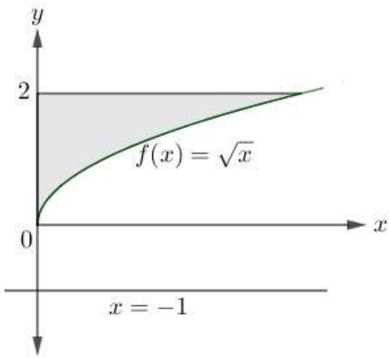
Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang dibentuk dari daerah di kanan kurva f dan di kiri sumbu Y dari $y = a$ sampai $y = b$ dan diputar mengelilingi garis $y = k$ adalah

$$V = 2\pi\int_a^b (y - k)\, f(y)\, dy.$$

Contoh 1

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y=\sqrt{x}$ dan di atas garis $x=-1$ pada interval $[0,2]$ diputar mengelilingi garis $x=-1$!

Penyelesaian :



$$V=2\pi\int_a^b (\mathrm{y}-k)\, f(\mathrm{y})\,dy = 2\pi\int_0^2 (y+1)y^2\,dy$$

$$=2\pi\int_0^2 y^3+y^2\,dy = 2\pi\left[\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = 13\frac{1}{3}\pi$$

Latihan :

1. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y=x^2+1$, di atas sumbu X dengan $0\le x\le 4$ diputar mengelilingi sumbu X!

2. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = \sin x$, di atas sumbu X dengan $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ diputar mengelilingi sumbu X!
3. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = -x^2 + 1$ dan di atas sumbu X diputar mengelilingi sumbu X!
4. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = \cos x$, di atas sumbu X dengan $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ diputar mengelilingi sumbu X!
5. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = e^x - 3$, sumbu X, dan sumbu Y diputar mengelilingi sumbu X!
6. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^3 - x$ dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu X!
7. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 + 1$, sumbu Y dengan $1 \le x \le 2$ pada kuadran I diputar mengelilingi sumbu Y!
8. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^3 - x$ dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu Y!

9. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu Y!

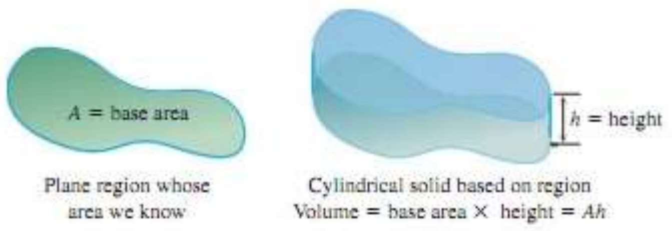
10. Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah di bawah kurva $y = \sin x$, di atas sumbu X dengan $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ diputar mengelilingi sumbu Y!

11. Diberikan kurva $y = 4x - x^2$. A adalah titik puncak dari kurva tersebut, dan g adalah garis yang menghubungkan A ke perpotongan kurva dengan sumbu X. D adalah daerah yang dibatasi sumbu X dan kurva y dengan syarat daerah tersebut di bawah garis g.
    a. Jika D diputar sekeliling sumbu X, tentukan volume benda tersebut!
    b. Jika D diputar sekeliling sumbu Y, tentukan volume benda tersebut! Berikan sketsa daerah D yang dimaksud.

12. Dengan menggunakan volume benda putar, tunjukkan bahwa volume kerucut dengan jari-jari r dan tinggi t adalah $\frac{1}{3}\pi r^2 t$!

Volume Benda yang Diketahui Irisan Penampangya

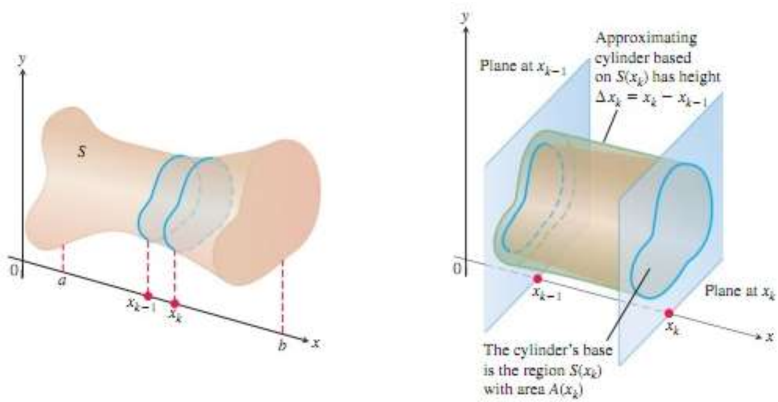
Pada Subbab ini akan dibahas mengenai cara menghitung volume benda yang diketahui penampang irisannya. Konsep yang digunakan di sini lebih umum dari konsep benda putar karena pada konsep benda putar penampang irisannya hanyalah berbentuk lingkaran.



Sumber : Thomas' Calculus Early Transendental (2014).

Gambar 1. Bangun yang diketahui penampang irisannya.

Diperhatikan benda di bawah ini.



Sumber : Thomas' Calculus Early Transendental (2014).

Gambar 1. Bangun yang diketahui irisan penampangnya.

Diambil sembarang partisi $P=\{\mathrm{a}=\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n=\mathrm{b}\}$ pada $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ dengan panjang subinterval $\Delta_i x.$ Selanjutnya dibuat potongan tegak lurus sumbu X pada interval $[\mathrm{x}_{i-1},\mathrm{x}_i]$ sehingga diperoleh irisan-irisan dari benda tersebut. Misalkan $A(x_i)$ merupakan luas area dari irisan pada x_i. Pendekatan volume pada irisan tersebut, katakan V_i, adalah $A(x_i)\cdot\Delta_i x.$ Karena terdapat n partisi pada interval $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, pendekatan dari volume benda putar tersebut adalah $\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\cdot\Delta_i x.$ Volume dari benda putar tesebut akan terpenuhi ketika n mendekati tak hingga, yaitu $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\cdot\Delta_i x.$ Dengan mengubah bentuk tersebut ke dalam bentuk integral diperoleh

$$V=\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa volume benda yang luas penampangnya $A(x)$ dari $x=a$ sampai $x=b$ adalah

$$V=\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx.$$

Berikut ini adalah langkah untuk menghitung volume suatu benda yang dapat diketahui irisan penampangnya:

i. Buatlah sketsa benda tersebut beserta irisannya.

ii. Tentukan rumus untuk $A(x)$, luas penampang irisannya

iii. Tentukan batas integralnya

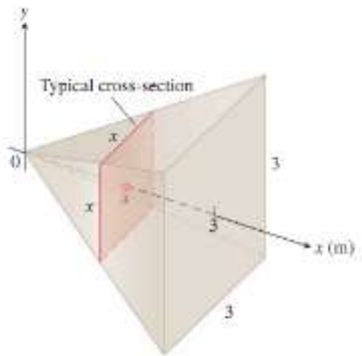
iv. Integralkan $A(x)$ untuk menghitung volumenya

Contoh 1

Sebuah piramida beralas persegi mempunyai tinggi $3m$ dan panjang sisi alas $3m$. Irisan dari piramida tersebut yang tegak lurus garis tinggi dan berjarak x m dari puncak berbentuk persegi dengan panjang sisi x m. Tentukan volume dari piramida tersebut!

Penyelesaian :

i. *Sketsa*. Di bawah ini diberikan sketsa benda tersebut dengan garis tinggi pada sumbu X dan puncak pada pusat koordinat beserta irisan penampangnya.



ii. *Rumus untuk* $A(x)$. Penampang irisan di x berupa persegi dengan panjang sisi x m. Oleh karena itu, $A(x) = x^2$.

iii. *Batas Integral.* Karena puncak piramida berada di pusat koordinat dan tinggi piramida 3 m maka irisan-irisan persegi terletak dari $x=0$ sampai $x=3$.

v. *Mengintegralkan $A(x)$ untuk menghitung volume.*

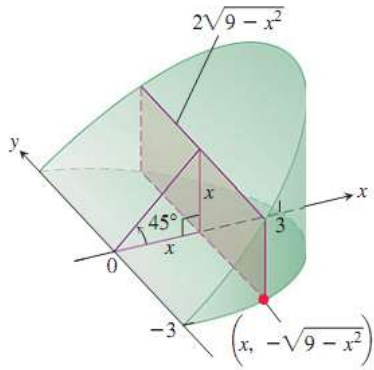
$$V=\int_0^3 A(x)dx=\int_0^3 x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9\,\text{m}^3.$$

Contoh 2

Sebuah pipa berbentuk tabung dengan jari-jari 3 satuan. Pipa tersebut dipotong lurus 45° terhadap alas melalui titik pusat alas pipa. Tentukan volume dari potongan pipa tersebut!

Penyelesaian :

i. *Sketsa.* Di bawah ini diberikan sketsa benda tersebut dengan diameter alas terletak pada sumbu Y dan pusat alas pada pusat koordinat.



ii. *Rumus untuk* $A(x)$. Diperhatikan bahwa alas dari benda tersebut berupa setengah lingkaran dengan jari-jari 3 satuan sehingga persamaan dari alas tersebut adalah $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0$. Selanjutnya, dari gambar tersebut, penampang dari irisan yang tegak lurus terhadap sumbu X pada absis x berupa persegi panjang. Karena irisan miringnya 45° terhadap sumbu X, maka panjang salah satu sisi irisan tersebut adalah x. Untuk sembarang absis x pada interval $[0,3]$ nilai y pada setengah lingkaran tersebut adalah $y = \sqrt{9-x^2}$ dan $y = -\sqrt{9-x^2}$ sehingga panjang sisi lain dari persegi panjag tersebut adalah $\sqrt{9-x^2} - \left(-\sqrt{9-x^2}\right) = 2\sqrt{9-x^2}$. Oleh karena itu,

$$A(x) = x \cdot 2\sqrt{9-x^2} = 2x\sqrt{9-x^2}.$$

iii. *Batas Integral.* Dari gambar jelas bahwa irisan-irisan persegi panjang terletak pada $x = 0$ sampai $x = 3$.

vi. Mengintegralkan $A(x)$ *untuk menghitung volume.*

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{3}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 18.$$

Latihan :

1. Carilah volumepiramida dengan tinggi $h$dan dasar berupa persegi dengan sisi b.
2. Carilah volume kerucut yang dasarnya berupa alips dengan panjang sumbu mayor dan minor berturut-turut $2a$ dan $2b$.
3. Suatu benda mempunyai alas berupa bidang lingkaran dengan radius R. Jika setiap irisan melintang yang tegak lurus alas berupa segitiga-segitiga yang tingginya sama, yaitu h. Carilah volume benda tersebut!
4. Suatu benda mempunyai alas berupa bidang lingkaran dengan radius R. Jika setiap irisan melintang yang tegak lurus alas berupa segitiga-segitiga sama sisi. Carilah volume benda tersebut!
5. Suatu benda mempunyai alas berupa bidang lingkaran dengan radius R. Jika setiap irisan melintang yang tegak lurus alas berupa persegi. Carilah volume benda tersebut!

BAB IV

TEKNIK INTEGRAL

Metode Substitusi

Subbab ini membahas salah satu teknik pengintegralan yang disebut dengan metode substitusi. Metode ini didasari oleh teorema berikut.

Teorema

Misalkan $u = g(x)$ adalah fungsi yang berturunan dengan range interval I dan f kontinu pada interval I, maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du\,.$$

Bukti:

Misalkan F adalah antiturunan dari f. Menurut aturan rantai,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $u = g(x)$ kita peroleh

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)dx &= \int \frac{d}{dx} F(g(x)) \\
&= F(g(x)) + C \\
&= F(u) + C \\
&= \int F'(u)du \\
&= \int f(u)du
\end{aligned}
$$

■

Secara teknis, metode ini dapat dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Pilih u yang sesuai, misalkan $u = g(x)$.
2. Hitung $\frac{du}{dx} = g'(x)$.
3. Lakukan substitusi $u = g(x)$ dan $du = g(x)dx$. Pada langkah ini, seluruh integral harus dalam u dan tidak boleh ada lagi x. Jika hal ini tidak dapat dilakukan, pilih substitusi u yang lain.
4. Hitung integralnya.
5. Ganti u dengan $g(x)$ sehingga diperoleh jawan dalam x.

Berikut adalah sejumlah contoh pengintegralan dengan metode substitusi.

Contoh 1

Hitunglah $\int 2(2x+4)^5\,dx$.

Penyelesaian :

Misalkan $u = 2x + 4$. Maka, $\frac{du}{dx} = 2$ dan $du = 2dx$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int 2(2x+4)^5\,dx &= \int u^5\,du \\ &= \frac{1}{6}u^6 + C \\ &= \frac{1}{6}(2x+4)^6 + C\end{aligned}$$

Contoh 2

Hitunglah $\int \cot x \csc^2 x\,dx$.

Penyelesaian :

Misalkan $u = \cot x$. Maka, $\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$ dan $-du = \csc^2 x\,dx$.

Dengan demikian,

$$\int \cot x \csc^2 x dx = -\int u du = -\frac{1}{2}u^2 + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x + C$$

Contoh 3

Hitunglah $\int x^2 \sqrt{2-x} dx$.

Penyelesaian :

Misalkan $u = 2 - x$. Maka, $\frac{du}{dx} = -1$ dan $-du = dx$. Dengan demikian,

$$\int x^2 \sqrt{2-x} dx = -\int (2-u)^2 \sqrt{u} du$$
$$= -\int \left(u^2 - 4u + 4\right) u^{\frac{1}{2}} du$$
$$= -\int \left(u^{\frac{5}{2}} - 4u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}} \right) du$$
$$= -\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= -\frac{2}{7}(2-u)^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5}(2-u)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(2-u)^{\frac{3}{2}} + C$$

Dalam beberapa kasus, kita perlu memodifikasi soal terlebih dahulu menggunakkan identitas-identitas yang berlaku untuk dapat menentukan substitusi yang sesuai. Contoh soal dibawah ini menunjukkan hal tersebut.

Contoh 4

Hitunglah $\int \sin^3 2\theta d\theta$.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan identitas trigonometri $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, soal itu dapat dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned}\int \sin^3 2\theta d\theta &= \int \sin 2\theta \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \int \sin 2\theta \left(1 - \cos^2 2\theta\right) d\theta \\ &= \int \sin 2\theta d\theta - \int \sin 2\theta \cos^2 2\theta d\theta\end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan $u = \cos 2\theta$. Maka, $\frac{du}{d\theta} = -2\sin 2\theta$ dan $-\frac{du}{2} = \sin 2\theta d\theta$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 2\theta d\theta &= \int \sin 2\theta d\theta - \int \sin 2\theta \cos^2 2\theta d\theta \\ &= \int \sin 2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int u^2 du\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}u^3 + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta + C$$

Latihan

Pada soal no 1 – 7, tentukan integral dengan substitusi u yang diberikan.

1. $\int \sqrt{x+1}dx$ dengan $u = x+1$
2. $\int 2x(x^2+5)^{-4}dx$ dengan $u = x^2+5$
3. $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}dx$ dengan $u = x^4+1$
4. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta d2\theta$ dengan $u = \csc 2\theta$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$ dengan $u = \sqrt{5x+8}$
6. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ dengan $u = \sqrt{x}$
7. $\int \cos^3 x \sin x dx$ dengan $u = \cos x$

Pada soal no 8 – 15 tentukan, integral dengan memilih substitusi u yang sesuai.

8. $\int 10(10x-16)^6 dx$

9. $\int r\sqrt{5r^2+2}dr$

10. $\int \frac{e^{8\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}dr$

11. $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$

12. $\int \left(4x^2-12x+9\right)^{\frac{2}{3}}dx$

13. $\int \frac{ydy}{\sqrt{y+1}}$

14. $\int \tan^2 3\theta d\theta$

15. $\int \sec^2(\cos 3\theta)\sin 3\theta d\theta$

16. $\int \sin^n(a+bx)\cos(a+bx)dx$ dengan $n>0$ dan $b\neq 0$

17. Tentukan fungsi f sedemikian hingga $f'(x)=\sqrt{3x+1}$ dan $f(1)=5$.

18. Tentukan fungsi f sedemikian hingga $f'(x)=6-5\sin 2x$ dan $f(0)=3$.

19. Hitunglah $\int \sin x\cos x dx$ dengan dua cara. Pertama dengan menggunakan substitusi $u=\sin x$, kedua dengan menggunakan substitusi $u=\cos x$.

20. Hitunglah $\int (5x-1)^2 dx$ dengan dua cara. Pertama, dengan menjabarkan bentuk $(5x-1)^2$, kedua dengan substitusi $u = 5x - 1$.

Substitusi Trigonometri.

Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan suatu teknik pengintegralan dengan menggunakan metode substitusi. Subbab ini membahas teknik pengintegralan dengan menggunakan substitusi khusus, yaitu substitusi trigonometri.

Secara umum, metode ini diterapkan pada soal integral yang memuat bentuk-bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ dan $\sqrt{x^2 - a^2}$. Idenya adalah memilih substitusi yang menghapus akar. Inspirasi ini muncul dari identitas trigonometri $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ dan variasi bentuknya.

Sebagai contoh, substitusi $x = a\sin\theta$, dengan $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, pada $\sqrt{a^2 - x^2}$ akan menghasilkan

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)} \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta} \\
&= a|\cos\theta|
\end{aligned}
$$

Pada substitusi di atas, pembatasan $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ bukan tanpa maksud. Maksud pembatasan ini ada dua. Pertama, agar kita dapat menuliskan $x = a\sin\theta$ kembali dalam bentuk $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. Kedua, agar kita dapat mengganti $|\cos\theta|$ dalam bentuk yang lebih sederhana.

Contoh 1

Hitunglah $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

Penyelesaian :

Misalkan $x = 2\sin\theta$ dengan $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Maka, $\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$ atau $dx = 2\cos\theta d\theta$. Sehingga,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta d\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}}$$

$$= \int \frac{2\cos\theta d\theta}{4\sin^2\theta 2\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

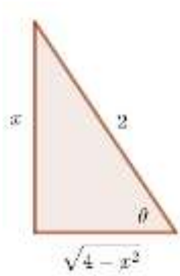
$$= \int \frac{2\cos\theta d\theta}{4\sin^2\theta 2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \csc^2\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\cot\theta + C$$

Solusi di atas masih memuat θ, oleh karena itu, kita perlu menyatakan solusi itu dalam x. Perhatikan gambar disamping. Karena $x = 2\sin\theta$, maka $\cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. Akhirnya kita peroleh,



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C\,.$$

Untuk menghapus akar dalam bentuk $\sqrt{x^2+a^2}$ dan $\sqrt{x^2-a^2}$ berturut-turut kita dapat menggunakan substitusi $x = a\tan\theta$

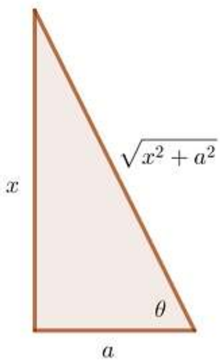
dengan $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dan $x = a\sec\theta$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ atau $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$. Penjelasan mengapa kedua substitusi ini yang dipilih analog dengan penjelasan sebelumnya. Oleh karena itu, bagian ini ditinggalkan sebagai latihan.

Contoh 2

Hitunglah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Penyelesaian :

Misalkan $x = a\tan\theta$ dengan $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Maka, $\frac{dx}{d\theta} = a\sec^2\theta$ atau $dx = a\sec^2\theta d\theta$. Dengan demikian,



$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}} \\ &= \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a\sqrt{\tan^2\theta+1}} \\ &= \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a\sqrt{\sec^2\theta}} \\ &= \int \sec\theta d\theta \\ &= \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ dan $\tan\theta = \frac{x}{a}$. Dengan demikian, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$.

Contoh 3

Hitunglah $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

Penyelesaian :

Misalkan $x = 5\sec\theta$ dengan $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ atau $\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$. Maka, $\frac{dx}{d\theta} = 5\sec\theta\tan\theta$ atau $dx = 5\sec\theta\tan\theta d\theta$. Dengan demikian,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{25\sec^2\theta-25}}{5\sec\theta}5\sec\theta\tan\theta d\theta$$
$$= 5\int \sqrt{\sec^2\theta-1}\tan\theta d\theta$$
$$= 5\int \tan^2\theta d\theta$$
$$= 5\int \left(\sec^2\theta-1\right)d\theta$$
$$= 5\int \sec^2\theta d\theta - 5\int d\theta$$
$$= 5\tan\theta - 5\theta + C$$

Karena $x = 5\sec\theta$, maka $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{5}$ dan $\theta = \sec^{-1}\left(\dfrac{x}{5}\right)$.

Dengan demikian,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \sqrt{x^2-25} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

Contoh 4

Hitunglah $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Penyelesaian :

Integral ini dapat dihitung dengan menggunakan substitusi $x = a\sin\theta$. Namun demikian jauh lebih mudah jika kita menyadari bahwa integral tentu tersebut merupakan luas setengah lingkaran berjari-jari *a*. Dengan demikian,

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi a^2$$

Latihan

Tentukan integral tak tentu berikut ini

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$

2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

5. $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx$

6. $\int x\sqrt{1-4x^2}\,dx$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int x^2\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}$

13. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{25+4x^2}$

14. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

15. $\displaystyle\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$

16. $\displaystyle\int \sqrt{8-2x-x^2}\,dx$

17. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2+2x+1}\,dx$

20. $\int \frac{\sqrt{1-(\ln\ x)^2}}{x \ln\ x}\, dx$

Tentukan integral tentu berikut ini

21. $\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2}$

22. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}$

23. $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

24. $\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$

25. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\ dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

26. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\ dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$

27. $\int_{\ln (3/4)}^{\ln (4/3)} \frac{e^t\ dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

28. $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln\ y)^2}}$

29. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

30. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\sqrt{1-4x^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{2/3} \sqrt{4-9x^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2-1}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt$

Tentukan nilai rata-rata dari

36. $f(x)=\sqrt{x^2-1}/x, \quad ; 1 \le x \le 7$

37. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \quad ; 1 \le x \le 3$

38. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh hiperbola $9x^2-4x=36$ dan garis $x=3$.

39. Tentukan luas daerah pada kuadran pertama dibatasi oleh sumbu X dan kurva $y = \sqrt{9 - x^2}/3$.

Gunakan substitusi trigonometri untuk membuktikan

40. $\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \frac{1}{2}a^2 \sin^{-1}(x/a) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$

Integral Fungsi Rasional

Pada subbab ini akan dibahas mengenai cara menghitung integral berbentuk fungsi rasional, dalam hal ini yang berbentuk $\frac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x), q(x)$ merupakan polinomial dengan $q(x) \neq 0$. Sebagai contoh, dengan teknik-teknik pengintegralan dari bab sebelumnya yang telah kita ketahui, kita belum bisa menyelesaikan

$$\int -\frac{3}{x^2 + x - 2}\, dx .$$

Hal ini bukan berarti pengintegralan tersebut tidak bisa diselesaikan, hanya saja kita belum mengetahui caranya. Diperhatikan fungsi

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|.$$

Turunan dari fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \\
&= 2\frac{d}{dx}\left(\ln|x+2| - \ln|x-1|\right) \\
&= \frac{d}{dx}\ln|x+2| - \frac{d}{dx}\ln|x-1| \\
&= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} \\
&= -\frac{3}{x^2+x-2}
\end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\int -\frac{3}{x^2+x-2}dx = \ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + c$

Pada bab sebelumnya kita telah mengenal beberapa pecahan polinomial sederhana yang diketahui nilai integralnya, yaitu

i. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

ii. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

iii. $\int \frac{1}{x^2+1}dx = arc\tan x + c$

Ketiga pengintegralan tersebut nantinya akan kita gunakan sebagai alat untuk menyelesaikan integral pecah rasional.

Diperhatikan fungsi $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x), q(x)$ merupakan polinomial dengan $q(x) \neq 0$ dan deg $\deg p(x) \geq \deg q(x).$ Bentuk pecahan tersebut dapat kita sederhanakan menjadi

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$$

dengan $\deg s(x) < \deg q(x).$ Oleh karena itu, dalam kasus ini dapat kita sederhanakan pada bentuk $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x), q(x)$ merupakan polinomial dengan $q(x) \neq 0$ dan $\deg p(x) < \deg q(x).$

Kasus I. Akar-akar $q(x)$ real dan berbeda.

Diasumsikan $q(x)$ merupakan polinomial berderajat $n.$ Jika akar-akar dari $q(x)$ real dan berbeda, maka $q(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

dengan $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}.$ Lebih lanjut, kita dapat menyatakan $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sebagai

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{(x - x_1)} + \frac{a_2}{(x - x_2)} + ... + \frac{a_n}{(x - x_n)}$$

dengan $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a_1}{(x-x_1)} + \frac{a_2}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{a_n}{(x-x_n)}dx$$
$$= a_1 \ln|x-x_1| + a_2 \ln|x-x_2| + \ldots + a_n \ln|x-x_n| + \mathrm{c}.$$

Contoh 1

Tentukan hasil dari $\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa bentuk x^2+2x-3 dapat diubah menjadi $(x+3)(x-1)$ sehingga kita dapat mengubah $\frac{x+1}{x^2+2x-3x}$ ke dalam bentuk $\frac{a_1}{x+3} + \frac{a_2}{x-1}$. Untuk memperoleh a_1 dan a_2, perhatikan langkah berikut ini.

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3x} = \frac{a_1}{x+3} + \frac{a_2}{x-1}$$
$$= \frac{a_1(x-1) + a_2(x+3)}{x^2+2x-3x}$$

Berdasarkan kesamaan dua fungsi, karena penyebut sudah sama maka kita perlu menyamakan pembilang. Maka dari itu haruslah

$$x+1 = a_1(x-1) + a_2(x+3).$$

Diambil $x=1$ maka diperoleh

$$2 = 4a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2}.$$

Diambil $x = -3$ maka diperoleh

$$-2 = -4a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+2x-3x}\,dx &= \int \frac{a_1}{x+3} + \frac{a_2}{x-1}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|\mathrm{x}+3| + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{x}-1| + \mathrm{c} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|(\mathrm{x}+3)(\mathrm{x}-1)\right| + c.
\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan hasil dari $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^3+2x^2-3x}\,dx$!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^3+2x^2-3x} = 1 + \frac{3x+1}{x^3+2x^2-3x}.$$

Selanjutnya, bentuk x^3+2x^2-3x dapat diubah menjadi $\mathrm{x}(x+3)(x-1)$ sehingga kita dapat mengubah $\frac{3x+1}{x^3+2x^2-3x}$ ke dalam bentuk $\frac{a_1}{x+3}+\frac{a_2}{x-1}+\frac{a_3}{x}$. Untuk memperoleh a_1, a_2 dan a_3, perhatikan langkah berikut ini.

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{x^3+2x^2-3x} &= \frac{a_1}{x+3}+\frac{a_2}{x-1}+\frac{a_3}{x}\\ &= \frac{a_1x(x-1)+a_2x(x+3)+a_3(x+3)(x-1)}{x^3+2x^2-3x}\end{aligned}$$

Berdasarkan kesamaan dua fungsi, karena penyebut sudah sama maka kita perlu menyamakan pembilang. Maka dari itu haruslah

$$3x+1 = a_1x(x-1)+a_2x(x+3)+a_3(x+3)(x-1).$$

Diambil $x=1$ maka diperoleh

$$4 = 4a_2 \Leftrightarrow a_2 = 1.$$

Diambil $x=-3$ maka diperoleh

$$-8 = 12a_1 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{2}{3}.$$

Diambil $x=0$ maka diperoleh

$$1 = -3a_3 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{3}.$$

Akibatnya,

$$\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^3+2x^2-3x}dx = \int 1+\frac{3x+1}{x^3+2x^2-3x}dx$$

$$= \int 1+\frac{-\frac{2}{3}}{x+3}+\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{x}dx$$

$$= x-\frac{2}{3}\ln|\mathrm{x}-1|+\frac{1}{3}\ln|\mathrm{x}|+\mathrm{c}.$$

Kasus II. Akar-akar $q(x)$ real dan sama.

Diasumsikan $q(x)$ merupakan polinomial berderajat *n.* Jika akar-akar dari $q(x)$ real dan sama, maka $q(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$q(x) = (x-x_1)^n$$

dengan $x_1 \in \mathbb{R}.$ Lebih lanjut, kita dapat menyatakan $\frac{p(x)}{q(x)}$ sebagai

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{(x-x_1)}+\frac{a_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{a_n}{(x-x_1)^n}$$

dengan $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{a_1}{(x-x_1)}+\frac{a_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{a_n}{(x-x_1)^n}dx$$

$$= a_1 \ln|x-x_1| + \frac{-a_2}{x-x_1}+...+\frac{a_n}{(1-n)(x-x_1)^{n-1}}+\mathrm{c}.$$

Contoh 1

Tentukan hasil dari $\int \frac{x}{x^2+2x+1}dx$!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa bentuk

$$x^2 + 2x + 1$$

dapat diubah menjadi

$$(x+1)^2$$

sehingga kita dapat mengubah

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 1}$$

ke dalam bentuk

$$\frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} \; .$$

Untuk memperoleh a_1 dan a_2, perhatikan langkah berikut ini.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a_1(x+1) + a_2}{x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

Berdasarkan kesamaan dua fungsi, karena penyebut sudah sama maka kita perlu menyamakan pembilang. Maka dari itu haruslah

$$x = a_1(x+1) + a_2.$$

Diambil $x = -1$ maka diperoleh $-1 = a_2$.

Diambil $x = 1$ maka diperoleh

$$1 = 2a_1 - 1 \Leftrightarrow a_1 = 1.$$

Akibatnya,

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx$$
$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \mathrm{c}$$

Kasus III. Akar-akar $q(x)$ berupa bilangan kompleks non real.

Diasumsikan $q(x)$ merupakan polinomial berderajat *n.* Jika akar-akar dari $q(x)$ berupa bilangan kompleks maka $q(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$q(x) = \left((x+a_1)^2 + b_1\right)\left((x+a_2)^2 + b_2\right)\ldots\left((x+a_m)^2 + b_m\right)$$

dengan $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Lebih lanjut, kita dapat menyatakan $\frac{p(x)}{q(x)}$ sebagai

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1x+d_1}{(x+a_1)^2+b_1} + \frac{c_2x+d_2}{(x+a_2)^2+b_2} + \ldots + \frac{c_mx+d_m}{(x+a_m)^2+b_m}$$

dengan $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ Untuk hasil dari integralnya, kita akan cermati dari beberapa contoh berikut.

Contoh 1

Tentukan hasil dari $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$!

Penyelesaian :

Diperhatikan bahwa bentuk $\dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$ dapat kita ubah menjadi

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2+2x+2} &= \frac{2x+2-1}{x^2+2x+2}\\ &= \underbrace{\frac{2x+2}{x^2+2x+2}}_{i} - \underbrace{\frac{1}{x^2+2x+2}}_{ii}.\end{aligned}$$

Mengapa demikian? Akan kita lihat masing-masing bentuk. Pada bab sebelumnya kita telah mengenal integral substitusi. Hal tersebut mendasari bentuk i karena pembilang merupakan turunan dari penyebut. Hasil pegintegralan bentuk tersebut adalah

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,d(x^2+2x+2)\\ &= \ln\left(x^2+2x+2\right)\end{aligned}$$

Selanjutnya penyelesaian bentuk ii adalah sebagai berikut.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(\mathrm{x}+1)^2+1}\,dx = \arctan(x+1).$$

Dengan demikian,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + \mathrm{c}.$$

Contoh 2

Tentukan hasil dari $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}dx$!

Penyelesaian :

Dibentuk

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)} = \frac{c_1x+d_1}{x^2+1} + \frac{c_2x+d_2}{x^2+3}$$

$$= \frac{\left(c_1x+d_1\right)\left(x^2+3\right)+\left(c_2x+d_2\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}$$

$$= \frac{\left(c_1+c_2\right)x^3+\left(d_1+d_2\right)x^2+\left(3c_1+c_2\right)x+\left(3d_1+d_2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}$$

Agar terjadi kesamaan, maka haruslah

$$\begin{aligned} c_1+c_2 &= 0 \\ d_1+d_2 &= 0 \\ 3c_1+c_2 &= 0 \\ 3d_1+d_2 &= 1 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaian sistem persamaan tesebut diperoleh

$$c_1=c_2=0, d_1=\frac{1}{2}, d_2=-\frac{1}{2}.$$

Dengan demikian,

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(x^2+1\right)} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(x^2+3\right)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{3} + c.$$

Pertanyaan yang selanjutnya muncul adalah bagaimana jika bentuk tersebut memuat kombinasi dari bentuk di atas? Contoh berikut akan memudahkan kita memahaminya.

Contoh 1

Tentukan hasil dari $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+3)}dx$!

Penyelesaian :

Dibentuk

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}.$$

Berdasarkan kesamaan dua fungsi, karena penyebut sudah sama maka kita perlu menyamakan pembilang. Maka dari itu haruslah

$$1 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2.$$

Diambil $x = 1$ maka diperoleh

$$1 = 4B \Leftrightarrow B = \frac{1}{4}.$$

Diambil $x = -3$ maka diperoleh

$$1 = 16C \Leftrightarrow C = \frac{1}{16}.$$

Diperhatikan koefisien dari x^2, pada ruas kiri 0 sedangkan pada ruas kanan $A + C$. Oleh karena itu diperoleh $A = -C = -\frac{1}{16}$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^2(x+3)}\,dx &= \int -\frac{\frac{1}{16}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{x+3}\,dx \\ &= -\frac{1}{16}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{16}\ln|x+3| + c.\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan hasil dari $\int \frac{1}{(x^2+1)(x+3)}\,dx$!

Penyelesaian :

Dibentuk

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{\left(Ax+B\right)\left(x+3\right)+C\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}.$$

Berdasarkan kesamaan dua fungsi, karena penyebut sudah sama maka kita perlu menyamakan pembilang. Maka dari itu haruslah

$$1 = \left(Ax+B\right)\left(x+3\right)+C\left(x^2+1\right).$$

Diambil $x = -3$ maka diperoleh

$$1 = 10C \Leftrightarrow C = \frac{1}{10}.$$

Diperhatikan koefisien dari x^2, pada ruas kiri 0 sedangkan pada ruas kanan $A+C.$ Oleh karena itu diperoleh $A = -C = -\frac{1}{10}.$

Diperhatikan konstantanya, pada ruas kiri 1 sedangkan pada ruas kanan $3B+C.$ Oleh karena itu diperoleh

$$3B+C=1 \Leftrightarrow B = \frac{1-C}{3} = \frac{3}{10}.$$

Dengan demikian,

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}dx = \int \frac{-\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{10}}{x+3}dx$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{20}.2x}{x^2+1}+\frac{\frac{3}{10}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{10}}{x+3}dx$$

$$= -\frac{1}{20}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{10}\arctan x+\frac{1}{10}\ln x+c.$$

Latihan.

Tentukan hasil dari integral di bawah ini!

1. $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

2. $\int \frac{2}{(x+2)(x-2)}dx$

3. $\int \frac{2}{(x-1)(x-1)}dx$

4. $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-1)(\mathrm{x}-1)}dx$

5. $\int \frac{x-1}{(x^2+1)(x-2)}dx$

6. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$

7. $\int \frac{x^2+3x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$

8. $\int \frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

9. $\displaystyle\int \frac{2}{(2x-1)(x-1)}dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-1)(2x-1)}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)(3x-1)}$

12. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x-1)^2}$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$

15. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-3x+12}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x-10}$

18. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3-2x^2-x+2}dx$

Integral Parsial

Dalam subbab ini dijelaskan teknik pengintegralan lain untuk membantu kita menghitung integral yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus-rumus integral dasar. Teknik ini disebut dengan ***pengintegralan parsial***. Dasar pengintegralan parsial adalah teorema berikut

Teorema

Misalkan u dan v adalah fungsi-fungsi berturunan, maka

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Bukti:

Karena u dan v adalah fungsi-fungsi berturunan, maka

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

$$d(uv) = duv + udv$$

Dengan demikian,

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

$$uv = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

■

Contoh 1

Hitunglah $\int xe^{-x}dx$

Penyelesaian :

Misalkan $u = x$ dan $dv = e^{-x}dx$. Maka $du = dx$ dan $v = -e^{-x}$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= -xe^{-x} - \int\left(-e^{-x}\right)dx \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C\end{aligned}$$

Contoh 2

Hitunglah $\int x \ln x dx$.

Penyelesaian :

Misalkan $u = \ln x$ dan $dv = xdx$. Maka $du = \frac{dx}{x}$ dan $v = \frac{1}{2}x^2$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{x}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

Contoh 3

Hitunglah $\int e^x \cos x dx$.

Penyelesaian :

Misalkan $u = e^x$ dan $dv = \cos x dx$. Maka, $du = e^x dx$ dan $v = \sin x$. Dengan demikian,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Dengan memisalkan sekali lagi, misalkan $u = e^x$ dan $dv = \sin x dx$, maka $du = e^x dx$ dan $v = -\cos x$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\
&= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int \cos x e^x dx \right) \\
&= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \\
2\int e^x \cos x dx &= e^x \sin x + e^x \cos x \\
\int e^x \cos x dx &= \frac{e^x}{2} \sin x + \frac{e^x}{2} \cos x + C
\end{aligned}$$

Contoh di atas memperlihatkan bahwa terkadang diperlukan pengintegralan parsial lebih dari satu kali untuk menyelesaikan suatu soal. Contoh selanjutnya menggambarkan penggunaan integral parsial untuk mengintegralkan fungsi invers trigonometri.

Contoh 4

Hitunglah $\int \tan^{-1} x dx$

Penyelesaian :

Misalkan $u = \tan^{-1} x$ dan $dv = dx$. Maka, $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ dan $v = x$.

Dengan demikian,

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C$$

Salah satu kegunaan dari integral parsial adalah untuk menentukan rumus rekursi untuk $\int \sin^n x dx$ dan $\int \cos^n x dx$. Kita akan menurunkan rumus rekursi untuk keduanya.

Misalkan $u = \sin^{n-1} x$ dan $dv = \sin x dx$. Dengan demikian $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$ dan $v = -\cos x$. Dengan demikian,

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$$

$$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int (\sin^{n-2} x - \sin^n x)dx$$
$$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$$
$$n\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx$$
$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

Dengan demikian,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

Selanjutnya, misalkan $u = \cos^{n-1} x$ dan $dv = \cos x dx$. Dengan demikian $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx$ dan $v = \sin x$. Dengan demikian,

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (\cos^{n-2} x - \cos^n x)dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int \cos^n x dx$$

$$n\int \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x d$$

Dengan demikian,

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

Contoh 5

Hitunglah $\int \sin^4 x dx$.

Penyelesaian :

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx$$

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C$$

Latihan

Pada soal no 1 – 15, tentukan integral berikut.

1. $\int x \cos 5x \, dx$
2. $\int \left(x^2 + 2x\right) \cos x \, dx$
3. $\int t^2 \sin \beta t \, dt$
4. $\int t \csc^2 t \, dt$
5. $\int e^{2\theta} \sin 3\theta \, d\theta$
6. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2} \, dx$
7. $\int x^2 e^{-3x} \, dx$
8. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
9. $\int 6x \ln (7x) \, dx$
10. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
11. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$
12. $\int x^2 \sin x^3 \, dx$
13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

14. $\int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{2}\, dx$

15. $\int \frac{\left(\sin^{-1} x\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Pada soal no 16 – 30, tentukan integral tentu soal berikut.

16. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}\left(x^2\right) dx$

17. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\, dr$

18. $\int_0^t e^s \sin\left(t-s\right) ds$

19. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \sin 2t\, dt$

20. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x \sec^2 x\, dx$

21. $\int_2^3 \frac{\ln 2x^5}{x^2}\, dx$

22. $\int_0^{\pi/3} \sin x \ln\left(\cos x\right) dx$

23. $\int_0^2 y \sinh y\, dy$

24. $\int_{0}^{1} \left(x^2 + 1\right) e^{-x} \, dx$

25. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \arctan(1/x) \, dx$

26. $2\int_{1} x^4 (\ln x)^2 \, dx$

27. $\int_{1}^{2} \left(1 - x^2\right) e^{2x} \, dx$

28. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos\left(\theta^2\right) d\theta$

29. $\int_{0}^{1} \frac{3x + 7}{e^x} \, dx$

30. $\int_{0}^{5} x \sqrt[3]{x^2 + 2} \, dx$

Selesaikan soal berikut.

31. Sebuah partake yang bergerak sepanjang garis lurus memiliki kecepatan $v(t) = t^2 e^{-1}$ meter per detik selama t detik. Berapa jauh jarak yang ditempuh selama t detik pertama?

32. Tingkat perubahan pendapatan (dalam dola per kalkulator) dari penjualan x kalkulator adalah

$$R'(x) = (x+1)\ln(x+1)$$

Tentukan total pendapatan dari penjualan 12 kalkulator pertama.

33. Tingkat metabolism seseorang cenderung naik setelah makan, setelah beberapa lama berlalu, ia kembali ke tingkat istirahat metabolism. Fenomena ini dikenal dengan efek termik dan efeknya efeknya (dalam kJ per jam) untuk satu individu adalah

$$F(t) = -10.28 + 175.9\, e^{-t/13}$$

Di mana t merupakan jumlah jam yang telah berlalu sejak makan. Temukan energy termis total makanan selama 6 jam berikutnya setekah dengan memadukan fungsi efek temis antara $t = 0$ dan $t = 6$.

34. Tingkat pertumbuhan populasi mikroba diberikan oleh

$$m'(t) = 27\, t\, e^{3t}$$

Dimana t adalah waktu dalam hari. Berapa total akumulasi pertumbuhan selama 2 hari pertama?

35. Area yang ditutupi oleh hamparan lumut tumbuh pada kelajuan berikut

$$A'(t) = \sqrt{t}\, \ln t$$

cm^2 perhari, untuk $t \geq 1$. Tentukan jumlah area yang ditutupi lumut antara 4 dan 9 hari.

Gunakan integrasi parsial untuk mendapatkan formula berikut.

36. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx + c, \qquad a \neq 0$

37. $\int x^n . \ln|x|\, dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln|x|}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + c, \qquad n \neq -1$

Buktikan identitas-identitas berikut.

38. $\int \frac{x^2}{\left(a^2 + x^2\right)^n}\, dx = \frac{1}{2n-2}\left(-\frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}} + \int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}}\right)$

39. $\int \sec^n x\, dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$

40. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

DAFTAR PUSTAKA

Purcell, dkk. Calculus 8^{th} Edition. Prentice-Hall, Inc, London.

Stewart, J. 2010. Calculus. Concepts and Contexts, 4th edition. Brook/Cole, Canada.

Supama, dkk. 2003. Kalkulus II. FMIPA UGM, Yogyakarta.

Thomas, G. B., Weir, M. D., and Hass, J. 2013. Calculus. Early Transcendentals, 13th edition. Pearson, Boston.