

ISSN 1410 - 6841

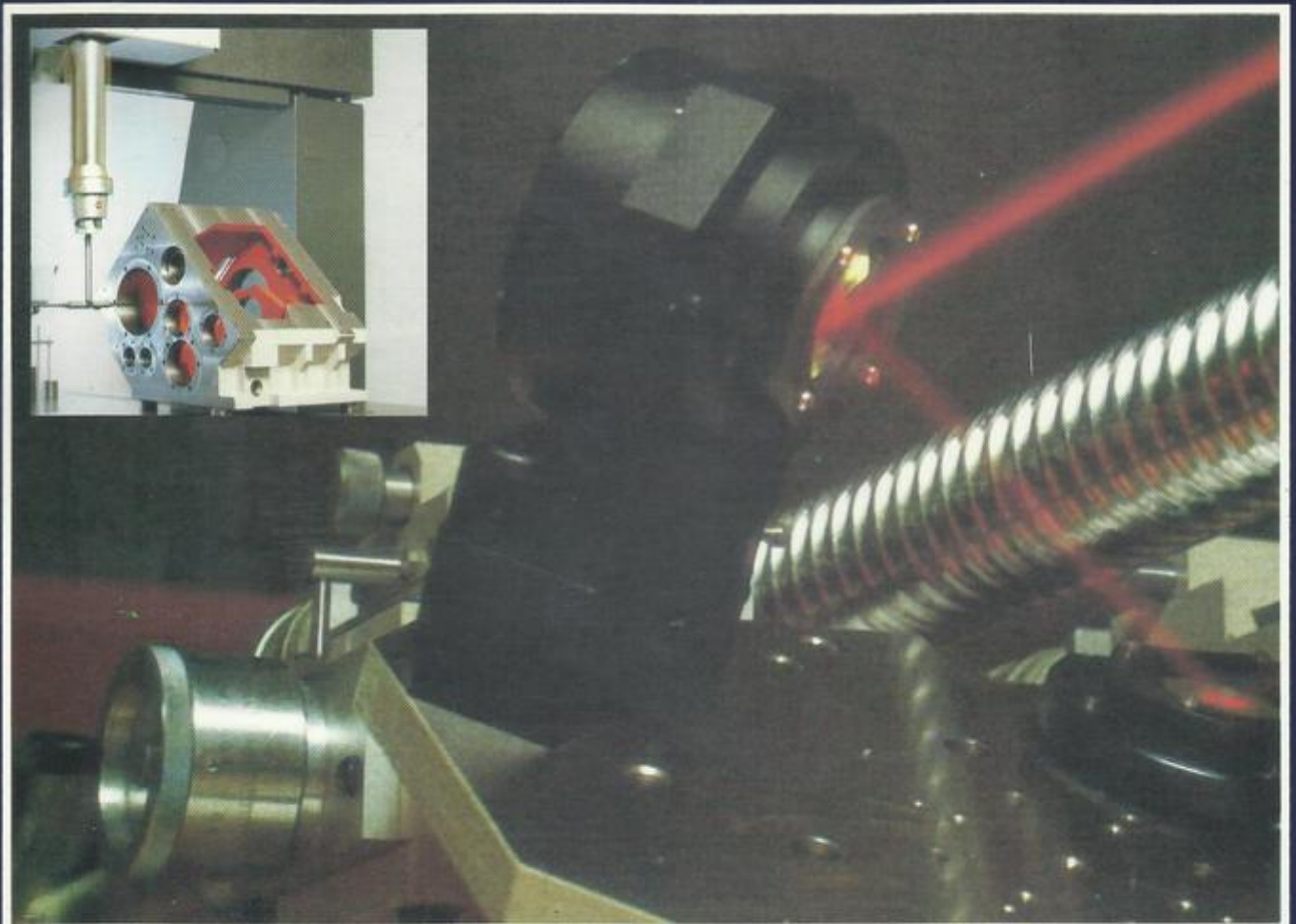


POROS

Jurnal Ilmiah Teknik Mesin

Volume 7 Nomor 1, Januari 2004

Terakreditasi No. 395/DIKTI/Kep/2000



**Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik
Universitas Tarumanagara**



POROS

Jurnal Ilmiah Teknik Mesin

Volume 7 Nomor 1, Januari 2004

TERAKREDITASI

No. 395/DIKTI/Kep/2000

DEWAN REDAKSI

- Pelindung** : Dekan Fakultas Teknik
- Ketua** : Ir. Sofyan Djamil, M.Si.
- Penyunting Ahli** : DR. Ir. Erry Y. T. Adesta, C.Eng, MIMech E, IPM
Prof. DR. Ir. Eddy S. Siradj, M.Sc. Eng.
DR. Ir. Danardono A.S.
DR. Ir. I Made Kartika D., Dipl. Ing.
Ir. Lamto Widodo, M.T.
- Penyunting Pelaksana** : Agustinus Purna Irawan, S.T., M.T.
Delvis Agusman, S.T., M. Sc.
Harto Tanujaya, S.T., M.T.
I Wayan Sukania, S.T., M.T.
- Sekretariat** : Endro Wahyono
- Penerbit** : Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik
Universitas Tarumanagara
- Alamat Redaksi** : Jalan Let. Jend. S. Parman No. 1, Jakarta 11440
Telp. (021) 5638358 - 5663124 - 5672548, Fax. (021) 5663277
E-mail : ftmesin@cbn.net.id atau mesin@tarumanagara.ac.id

Jurnal Ilmiah Poros terbit sejak bulan Januari 1998 dengan frekuensi 4 (empat) kali dalam setahun (Januari, April, Juli dan Oktober) ini, diharapkan dapat menjadi salah satu sarana para profesional (dari dunia usaha, pendidikan dan peneliti) untuk mengembangkan profesi dan berpartisipasi serta menyebarkan perkembangan tentang iptek mesin melalui penelitian dan kajian teknologi dan science.



POROS

Jurnal Ilmiah Teknik Mesin

Volume 7 Nomor 1, Januari 2004

TERAKREDITASI

No. 395/DIKTI/Kep/2000

DAFTAR ISI

Hasil Penelitian

- 1 – 6 Studi eksperimental pengaruh letak permukaan kasar sebagai gangguan aliran masuk (*inlet disturbance*) terhadap gejala separasi pada permukaan pelat lengkung
Astu Pudjanarsa
- 7 – 16 Studi peningkatan prestasi radiator menggunakan pipa oval dengan susunan selang-seling
Indra Mamad Gandidi dan Syafrizal
- 17 – 22 Optimasi biaya pengendalian emisi partikulat dengan perangkat *jet-pulse filter*
Adjar Pratoto, Dorce Yunirsyam, Minto Saksono dan Johan Samudra
- 23 – 32 Pengaruh kadar air awal kayu pada kandungan air kritik dan laju pengeringan sistem pengering konvensional air panas
Suyitno, Tri Istanto dan Wibawa Endra Juwana
- 33 – 46 Distribusi stream function dan vortisitas fluida pada ruangan persegi panjang yang digerakkan oleh dinding yang saling berhadapan
Y. B. Lukiyanto
- 47 – 53 Memprediksi harga koefisien hambatan aerodinamis pada mobil dengan metode uji jalan
Agustinus Purna Irawan
- 54 – 59 Pengaruh oksidasi pada produk polimer
Y. B. Moelyanto Soediro

Kajian Teknologi dan Science

- 60 – 67 Fenomena kebocoran komponen frekuensi pada pengamatan dan pengolahan sinyal digital
A. Rugerry Toni L.

EDITORIAL

Jurnal Ilmiah Teknik Mesin "POROS", telah terakreditasi DIKTI dengan No. 395/DIKTI/Kep/2000. Pada edisi ini jurnal menampilkan 7 (tujuh) buah karya tulis hasil penelitian dan 1 (satu) buah makalah hasil kajian dan science yang berasal dari berbagai perguruan tinggi dan instansi pemerintah.

Karya tulis hasil penelitian disajikan oleh Astu Pudjanarsa dengan judul "*Studi eksperimental pengaruh letak permukaan kasar sebagai gangguan aliran masuk (inlet disturbance) terhadap gejala separasi pada permukaan pelat lengkung*", Indra Mamad Gandidi dan Syafrizal dengan judul "*Studi peningkatan prestasi radiator menggunakan pipa oval dengan susunan selang-seling*", Adjar Pratoto dkk dengan judul "*Optimasi biaya pengendalian emisi partikulat dengan perangkat jet-pulse filter*", Suyitno dkk dengan judul "*Pengaruh kadar air awal kayu pada kandungan air kritik dan laju pengeringan sistem pengering konvensional air panas*", Y. B. Lukiyanto dengan judul "*Distribusi stream function dan vortisitas fluida pada ruangan persegi panjang yang digerakkan oleh dinding yang saling berhadapan*", Agustinus Purna Irawan dengan judul "*Memprediksi harga koefisien hambatan aerodinamis pada mobil dengan metode uji jalan*", serta Y. B. Moelyanto Soediro dengan judul "*Pengaruh oksidasi pada produk polimer*". Sedang makalah hasil kajian dan science ditulis oleh A. Rugerry Toni L. dengan judul "*Fenomena kebocoran komponen frekuensi pada pengamatan dan pengolahan sinyal digital*".

Untuk edisi mendatang kami sangat mengharapkan peran serta rekan-rekan sejawat dapat mengisi jurnal ini, demi terpenuhinya penerbitan jurnal POROS secara berkala.

Jakarta, Januari 2004

S. D

DISTRIBUSI *STREAM FUNCTION* DAN VORTISITAS FLUIDA PADA RUANGAN PERSEGI PANJANG YANG DIGERAKKAN OLEH DINDING YANG SALING BERHADAPAN

Y.B. Lukiyanto¹⁾

Abstract: *The form of fluid flow depends on many factors such as the fluid type and the channel form. Using computational technology, the distribution of vorticity and the stream function of a certain fluid type and a certain channel form can be computed such that the form of fluid flow can be predicted. This paper discusses incompressible fluid flow which is generated by a face-to-face rectangle wall that moves on opposite directions. By changing boundary values, the distribution of vorticity as well as the stream function of fluid flow on several variations of rectangle spaces can be computed. The similarities as well as the differences of fluid flow on those spaces can also be identified.*

Keywords : *computation, vorticity, stream function, rectangles*

PENDAHULUAN

Elektronika dan informatika saat ini sudah sangat luas penerapannya, dari industri hiburan sampai pemakaiannya pada bidang ilmu yang berhubungan dengan kesehatan. Banyak cabang ilmu yang perkembangannya menjadi lebih cepat dengan memanfaatkan teknologi elektronika dan informatika ini. Pada bidang kedokteran misalnya, saat ini sudah banyak peralatan yang digunakan untuk mendeteksi penyempitan pembuluh darah yang dapat mengganggu laju aliran darah.

Dari contoh tersebut, agar dapat diaplikasikan dengan lebih mudah dan lebih cepat, maka diperlukan pengetahuan yang mendalam tentang dinamika fluida, khususnya karakteristik aliran fluida, baik fluida *compressible* maupun *incompressible*, yang mengalir melalui suatu saluran.

Tulisan ini bertujuan untuk mengetahui bentuk aliran fluida *incompressible* yang diperkirakan akan terjadi pada suatu ruangan berbentuk persegi panjang dengan cara mengamati distribusi vortisitas dan *stream function*-nya. Penggerak/pembangkit terjadinya aliran adalah sisi-sisi persegi panjang yang saling berhadapan.

DASAR TEORI

Pada saat suatu fluida mengalir dalam suatu saluran, sifat-sifat aliran akan dipengaruhi oleh jenis dan sifat fluida, suhu fluida, distribusi kecepatan fluida, tekanan fluida, bentuk saluran, kekasaran permukaan, dll. Parameter-parameter tersebut dapat mempengaruhi aliran fluida baik secara bersama-sama maupun sendiri-sendiri.

Pada kenyataannya, fluida yang mengalir dalam suatu saluran dalam selang waktu tertentu tidak dipengaruhi oleh 1 parameter atau banyak parameter, tetapi hanya dipengaruhi oleh beberapa parameter saja. Karena itulah maka persoalan dinamika fluida dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan matematika yang sederhana.

¹⁾ Dosen Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Sanata Dharma Yogyakarta

Persamaan yang menghubungkan sifat-sifat fluida adalah persamaan Navier-Stokes (Gerhard, P.M. and Richard, J.G., 1985). Persamaan Navier – Stokes untuk 2 dimensi dalam arah x adalah sebagai berikut :

$$\frac{D\rho U}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + X \quad (1)$$

dengan :

- ρ : massa jenis fluida
- p : tekanan fluida
- t : waktu
- μ : viskositas fluida
- U : komponen kecepatan dalam arah sumbu x
- V : komponen kecepatan dalam arah sumbu y
- X : komponen gaya dalam arah sumbu x

Pada saat fluida *incompressible* mengalir dalam suatu ruangan, maka perbedaan tekanan antara tiap titik dalam ruangan tersebut sangat kecil sehingga massa jenisnya dapat dianggap seragam ($\rho \cong \text{konstan}$). Jika viskositasnya juga dianggap konstan, persamaan Navier-Stokes menjadi :

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + X \quad (2)$$

Jika dituliskan dalam notasi vektor :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F} \text{ dengan } \vec{F} = X\hat{i} + Y\hat{j} \quad (3)$$

Untuk suatu aliran dalam keadaan tunak (*steady*) persamaan Navier Stokes menjadi :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = 0, \text{ dengan notasi lain : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

yang biasa disebut dengan persamaan kontinuitas.

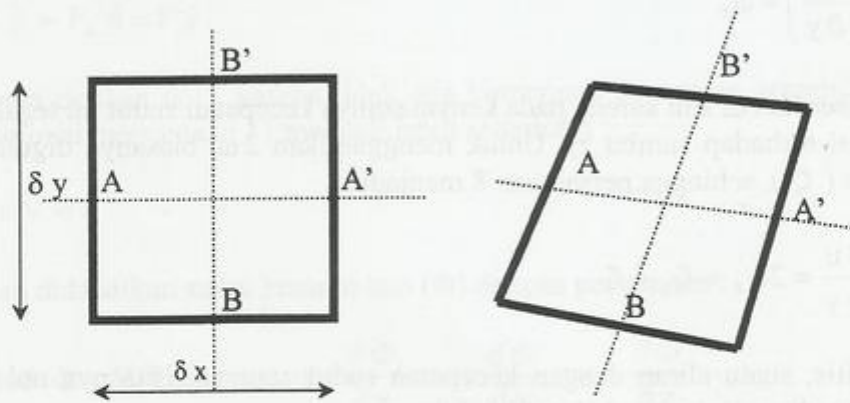
Persamaan Navier-Stokes dengan persoalan yang sudah disederhanakan tersebut masih mengandung unsur tekanan P. Dapat dicari persamaan atur yang tidak mengandung unsur/variabel tekanan P.

Vortisitas

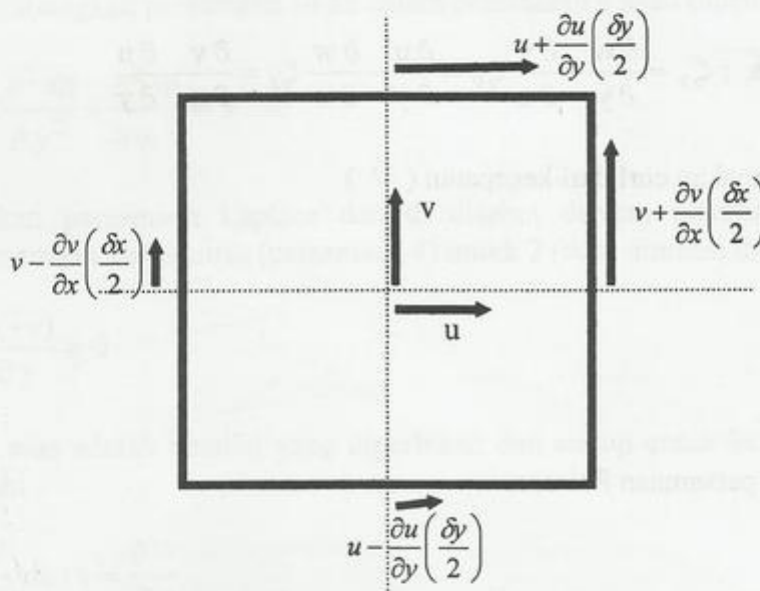
Partikel fluida yang bergerak translasi dan rotasi juga mengalami perubahan bentuk atau deformasi (Gambar 1).

Karena terjadinya perubahan bentuk inilah maka 2 buah garis lurus di dalam partikel berotasi dengan kecepatan sudut yang berbeda. Karena adanya perbedaan kecepatan sudut maka untuk menentukan kecepatan sudut partikel fluida saat berotasi digunakan asumsi rata-rata :

kecepatan sudut (ω) adalah rata-rata kecepatan sudut ω garis lurus yang saling tegak lurus di dalam partikel fluida (Gerhard, P.M. and Richard, J.G., 1985).



Gambar 1. Deformasi partikel fluida yang bergerak



Gambar 2. Kecepatan partikel fluida

Untuk memudahkan analisa, kedua garis lurus ini biasanya dipilih yang sejajar dengan sumbu koordinat (x dan y) sehingga kecepatan sudutnya (tegak lurus sumbu z) :

$$\omega \cong \frac{1}{2} (\omega_{AA'} + \omega_{BB'}) \quad (5)$$

$$\omega_{AA'} = \frac{V_{A'} - V_A}{\delta_x} = \frac{\left[v + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\delta_x}{2} \right) \right] - \left[v - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\delta_x}{2} \right) \right]}{\delta_x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

$$\omega_{BB'} = \frac{U_{B'} - U_B}{\delta_y} = \frac{\left[u + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\delta_y}{2} \right) \right] - \left[u - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\delta_y}{2} \right) \right]}{\delta_y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

sehingga persamaan 5 menjadi :

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_z \quad (8)$$

Subskrip z diberikan di sini karena pada kenyataannya kecepatan sudut ini tegak lurus pada bidang x-y (berotasi terhadap sumbu z). Untuk menggantikan 2ω biasanya digunakan istilah lain, yaitu vortisitas (ζ), sehingga persamaan 8 menjadi :

$$2\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z = \zeta_z = \zeta \quad (9)$$

Secara teoritis, suatu aliran dengan kecepatan sudut atau vortisitasnya nol (diabaikan) biasa disebut dengan aliran irrotasional (*irrotational flow*).

Bentuk vektor dari vortisitas :

$$\vec{\zeta} = \zeta_x \hat{i} + \zeta_y \hat{j} + \zeta_z \hat{k} ; \zeta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad \zeta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

Sehingga vortisitas merupakan curl dari kecepatan ($\vec{V}$)

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} \quad (11)$$

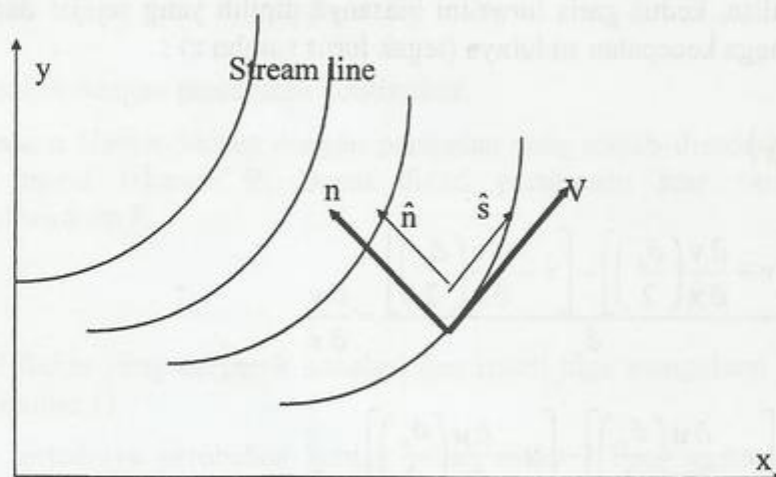
dan

$$\nabla^2 \zeta = 0 \quad (12)$$

yang merupakan bentuk persamaan Poisson.

Stream Function

Pada fluida yang mengalir, bisa dibuat suatu sumbu koordinat (x-y) dan *stream line*, yaitu suatu garis imajiner yang selalu searah dengan arah vektor kecepatan aliran fluida.



V : Vektor kecepatan

Gambar 3. Stream line

Pada suatu partikel fluida bisa dibuat suatu sumbu koordinat s-n yang arahnya selalu berubah terhadap sumbu koordinat x-y. Kecepatan fluida dalam sumbu s-n adalah :

$$\vec{V} = V_s \hat{s} + V_n \hat{n} = V_s \hat{s}$$

V_n selalu sama dengan nol, karena tidak ada komponen kecepatan searah dengan $\hat{n}$. Untuk kondisi irrotational, persamaan 11 menjadi lebih sederhana :

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = 0 \quad (13)$$

Sehingga akan didapatkan suatu besaran lain (Φ) dengan persamaan :

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi = \nabla \Phi \text{ dengan : } u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (14)$$

Dengan menggabungkan persamaan 14 ke dalam persamaan 4 akan diperoleh :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi \quad (15)$$

yang merupakan persamaan Laplace dan Φ disebut dengan potensial kecepatan (*velocity potential*). Persamaan kontinuitas (persamaan 4) untuk 2 (dua) dimensi dapat dituliskan :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(-v)}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

Persamaan di atas adalah kondisi yang diperlukan dan cukup untuk keberadaan fungsi $\Psi(x,y)$ yang memenuhi :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ dan } v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (17)$$

Fungsi Ψ inilah yang disebut dengan fungsi aliran (*stream function*) (Gerhard, P.M and Richard, J.G., 1985). Dapat dituliskan suatu persamaan yang menghubungkan *stream function* dengan vortisitas :

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = -\nabla^2 \Psi \quad (18)$$

yang merupakan persamaan Laplace.

Persamaan 12 dan 18 di atas merupakan ungkapan aliran irrotasional yang sudah tidak mengandung unsur p (tekanan).

PEMBAHASAN

Dalam mencari distribusi vortisitas dan *stream function* pada persoalan ini dipilih menggunakan metode numeris. Dengan metode ini dimungkinkan dilakukan pengubahan dimensi persegi panjang dengan cepat dan mudah.

Sebagai langkah awal adalah mengubah persamaan 12 dan 18 menjadi bentuk persamaan diskrit setelah terlebih dahulu memasukkan syarat batasnya.

Untuk membantu menganalisa perhitungan secara numeris, kotak persegi panjang dibagi menjadi bagian-bagian yang kecil dengan sistem grid (kotak bujur sangkar yang sangat kecil (Gambar 4). Sedangkan sistem koordinat yang dipergunakan adalah x-y dengan titik O(0,0) berada dipojok kiri bawah pada bujursangkar.

Pada penelitian ini jarak antar titik dalam arah sumbu x sama dengan jarak antar titik dalam arah sumbu y ($\Delta x = \Delta y = H$). Jumlah grid ke arah sumbu x ada m ($i=1$ s/d $i=m$), ke arah sumbu y ada n ($j=1$ s/d $j=n$), dengan m dan n sesuai dengan bentuk ruangan yang ditinjau.

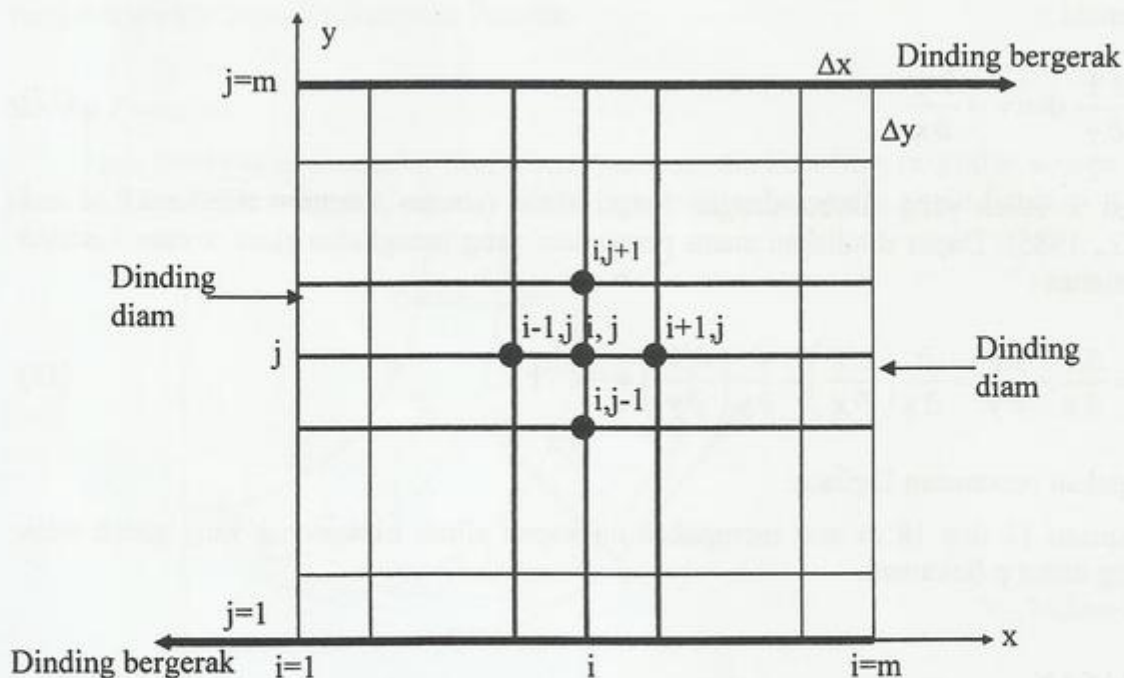
Bentuk ruangan	Jumlah grid arah x (m)	Jumlah grid Arah y (n)
Bujursangkar	11	11
Persegi panjang I	7	15
Persegi panjang II	15	7

Berdasarkan Metode Iterasi Jacobi (Hoffman,K.A., 1989), harga vortisitas dan *stream function* pada titik i,j adalah sebagai berikut :

$$\zeta_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \{ \zeta_{i+1,j}^k + \zeta_{i-1,j}^k + \zeta_{i,j+1}^k + \zeta_{i,j-1}^k \} \quad (19)$$

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \{ \psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^k + \psi_{i,j+1}^k + \psi_{i,j-1}^k \} + H^2 \zeta^k \quad (20)$$

dengan : k = harga sebelumnya (lama) dan k+1 = harga sesudahnya (baru)



Gambar 4. Sistem grid untuk bujur sangkar

Syarat Batas *stream function*

Dari Gambar 4 bisa diperoleh syarat batas untuk *stream function* :

- Sisi kiri: $\Psi = 0$ dan $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$; $\psi_{1,j} = 0$ dengan $j = 1$ s/d n (21)

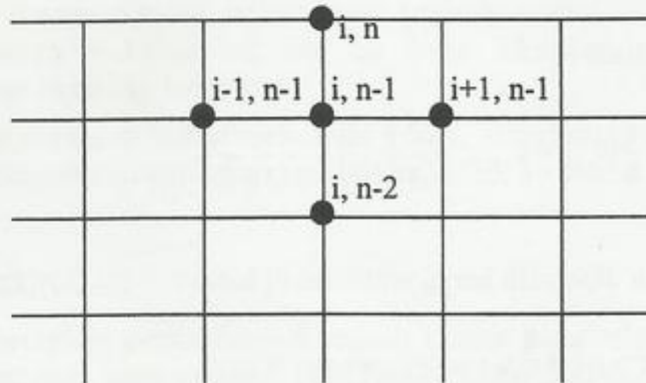
- Sisi bawah: $\Psi = 0$ dan $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -1$; $\psi_{i,1} = 0$ dengan $i = 1$ s/d m (22)

- Sisi kanan: $\Psi = 0$ dan $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$; $\psi_{m,j} = 0$ dengan $j = 1$ s/d n (23)

- Sisi atas: $\Psi = 0$ dan $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1$; $\psi_{i,m} = 0$ dengan $i = 1$ s/d m (24)

Syarat batas vortisitas :

Tinjau *grid* pada sisi atas :



Gambar 5. Sistem *grid* pada sisi atas

Harga vortisitas pada sisi atas di titik i, n diperoleh dari persamaan 18 :

$$\zeta_{i,n} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i,n}$$

yang besarnya tergantung pada harga *stream function* Ψ di titik-titik tetangga di sekitar i, j . Maka untuk ruangan berbentuk bujur sangkar :

$$\zeta_{i,11} = A_1 \psi_{i-1,10} + A_2 \psi_{i,10} + A_3 \psi_{i+1,10} + A_4 \psi_{i,9} + A_5 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,11} \quad (25)$$

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor (Hoffman, K.A., 1989), maka akan diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$\psi_{i+1,10} = \psi_{i,11} + H \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,11} + H^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i,11} - H \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,11} + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i,11} + O(H^3) \quad (26)$$

$$\psi_{i-1,10} = \psi_{i,11} + H \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,11} + H^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i,11} - H \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,11} + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i,11} + O(H^3) \quad (27)$$

$$\psi_{i,10} = \psi_{i,11} - H \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,11} + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i,11} + O(H^3) \quad (28)$$

$$\psi_{i,9} = \psi_{i,11} - 2H \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,11} + \frac{2^2 H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i,11} + O(H^3) \quad (29)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 26, 27, 28 dan 29 ke dalam persamaan 25, akan diperoleh :

$$A_1 = -\frac{1}{H^2} ; A_2 = \frac{8}{3H^2} ; A_3 = -\frac{1}{H^2} ; A_4 = -\frac{2}{3H^2} \text{ dan } A_5 = -\frac{2}{3H}$$

Sehingga persamaan 25 menjadi :

$$\zeta_{i,11} = \frac{1}{H^2} \left(-\psi_{i-1,10} + \frac{8}{3} \psi_{i,10} - \psi_{i+1,10} - \frac{2}{3} \psi_{i,9} \right) - \frac{2}{3H} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,11} \quad (30)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh harga vortisitas di batas :

- Sisi kiri : $\zeta_{1,j} = \frac{1}{H^2} \left(-\psi_{2,j-1} + \frac{8}{3} \psi_{2,j} - \psi_{2,j+1} - \frac{2}{3} \psi_{3,j} \right) \quad (31)$

- Sisi bawah $\zeta_{i,1} = \frac{1}{H^2} \left(-\psi_{i-1,2} + \frac{8}{3} \psi_{i,2} - \psi_{i+1,2} - \frac{2}{3} \psi_{i,3} \right) - \frac{2}{3H} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,1} \quad (32)$

- Sisi kanan: $\zeta_{11,j} = \frac{1}{H^2} \left(-\psi_{10,j-1} + \frac{8}{3} \psi_{10,j} - \psi_{10,j+1} - \frac{2}{3} \psi_{9,j} \right) \quad (33)$

Vortisitas di titik sudut :

Harga vortisitas di keempat titik sudut dihitung dengan merata-rata harga vortisitas titik-titik di sebelahnya (atas atau bawah dan kiri atau kanannya) :

- Sudut kiri bawah : $\zeta_{1,1} = \frac{1}{2} (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) \quad (34)$

- Sudut kanan bawah : $\zeta_{11,1} = \frac{1}{2} (\zeta_{11,2} + \zeta_{10,1}) \quad (35)$

- Sudut kiri atas : $\zeta_{1,11} = \frac{1}{2} (\zeta_{1,10} + \zeta_{2,11}) \quad (36)$

- Sudut kanan atas : $\zeta_{11,11} = \frac{1}{2}(\zeta_{11,10} + \zeta_{10,11})$ (37)

Untuk bentuk persegi panjang yang lainnya (persegi panjang I dan persegi panjang II) dapat dicari dengan menggunakan persamaan di atas dengan menggantikan harga m dan n. Dengan hasil diskritisasi di atas kemudian dibuat suatu program dengan langkah-langkah penghitungan/algorithm sebagai berikut :

1. Memberikan harga awal vortisitas ζ dan *stream function* ψ di semua titik dengan harga sembarang (pada program ini diberi harga nol).
2. Menghitung harga vortisitas ζ di batas kiri, bawah, kanan dan atas dengan menggunakan persamaan 30, 31, 32 dan 33.
3. Menghitung harga vortisitas ζ (i,j) di semua titik selain di batas dan sekaligus menghitung error perhitungan vortisitas $\epsilon\zeta$ dengan menggunakan persamaan 19.
4. Dengan harga vortisitas ζ yang baru ini dipergunakan untuk menghitung *stream function* di semua titik ψ (i,j) dan mencari error perhitungan *stream function* $\epsilon\psi$ dengan menggunakan persamaan 20.
5. Jika $\epsilon\zeta$ dan $\epsilon\psi$ dianggap masih terlalu besar, penghitungan diulangi lagi ke langkah 2. Pada perhitungan, harga maksimal $\epsilon\zeta$ dan $\epsilon\psi$ yang diberikan adalah 0,001 yaitu selisih perhitungan error iterasi ke k dan k+1.
6. Jika $\epsilon\zeta$ dan $\epsilon\psi$ dianggap sudah memenuhi syarat, menghitung harga vortisitas di keempat titik sudutnya dengan menggunakan persamaan 34, 35, 36 dan 37.

HASIL PENGHITUNGAN

Dengan menerapkan persamaan-persamaan diskrit yang telah diperoleh pada langkah-langkah perhitungan pada suatu program FORTRAN (Lampiran) dan dengan mengubah harga m dan n yang sesuai dengan bentuk persegi panjang, maka diperoleh harga-harga vortisitas dan *stream function* di semua titik pada ketiga bentuk persegi panjang tersebut. Tabel 1 dan Tabel 2

Tabel 1. Hasil perhitungan *stream function* vortisitas bentuk bujur sangkar

		i										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
j	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	10	0.000	-0.029	-0.049	-0.061	-0.069	-0.071	-0.069	-0.061	-0.049	-0.029	0.000
	9	0.000	-0.034	-0.065	-0.088	-0.102	-0.107	-0.102	-0.088	-0.065	-0.034	0.000
	8	0.000	-0.032	-0.067	-0.097	-0.116	-0.122	-0.116	-0.097	-0.067	-0.032	0.000
	7	0.000	-0.029	-0.066	-0.098	-0.120	-0.127	-0.120	-0.098	-0.066	-0.029	0.000
	6	0.000	-0.028	-0.065	-0.098	-0.120	-0.128	-0.120	-0.098	-0.065	-0.028	0.000
	5	0.000	-0.029	-0.066	-0.098	-0.120	-0.127	-0.120	-0.098	-0.066	-0.029	0.000
	4	0.000	-0.032	-0.067	-0.097	-0.116	-0.122	-0.116	-0.097	-0.067	-0.032	0.000
	3	0.000	-0.034	-0.065	-0.088	-0.102	-0.107	-0.102	-0.088	-0.065	-0.034	0.000
	2	0.000	-0.029	-0.049	-0.061	-0.069	-0.071	-0.069	-0.061	-0.049	-0.029	0.000
	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

adalah hasil perhitungan distribusi harga vortisitas dan *stream function* yang dilakukan untuk 11 x 11 titik di dalam bujur sangkar dengan jumlah iterasi 117. Tabel 3 dan Tabel 4 adalah hasil perhitungan distribusi harga vortisitas dan *stream function* yang dilakukan untuk 7 x 15 titik di dalam persegi panjang I dengan jumlah iterasi 25. Tabel 5 dan Tabel 6 adalah hasil perhitungan distribusi harga vortisitas dan *stream function* yang dilakukan untuk 15 x 7 titik di dalam persegi panjang II dengan jumlah iterasi 30.

Tabel 2. Hasil perhitungan vortisitas bentuk bujur sangkar

		i										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
j	11	-4.160	-7.245	-6.285	-5.440	-4.895	-4.709	-4.895	-5.439	-6.285	-7.245	-4.160
	10	-1.076	-3.299	-3.940	-4.020	-3.958	-3.922	-3.958	-4.020	-3.940	-3.299	-1.076
	9	1.397	-0.935	-2.156	-2.743	-2.994	-3.063	-2.994	-2.743	-2.156	-0.935	1.397
	8	2.308	0.317	-1.006	-1.801	-2.214	-2.341	-2.214	-1.800	-1.006	0.317	2.309
	7	2.598	0.899	-0.384	-1.240	-1.720	-1.873	-1.719	-1.240	-0.384	0.900	2.598
	6	2.658	1.067	-0.189	-1.055	-1.552	-1.712	-1.552	-1.055	-0.189	1.067	2.659
	5	2.597	0.899	-0.384	-1.240	-1.720	-1.873	-1.720	-1.240	-0.384	0.900	2.598
	4	2.308	0.316	-1.006	-1.801	-2.214	-2.341	-2.214	-1.801	-1.006	0.317	2.308
	3	1.396	-0.936	-2.156	-2.743	-2.995	-3.063	-2.994	-2.743	-2.156	-0.935	1.397
	2	-1.076	-3.299	-3.940	-4.020	-3.958	-3.922	-3.958	-4.020	-3.940	-3.299	-1.076
	1	-4.160	-7.245	-6.285	-5.440	-4.896	-4.710	-4.895	-5.440	-6.285	-7.245	-4.160

Tabel 3. Hasil perhitungan *stream function* bentuk persegi panjang I

		i						
		1	2	3	4	5	6	7
j	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	14	0.000	-0.046	-0.070	-0.077	-0.070	-0.046	0.000
	13	0.000	-0.046	-0.078	-0.088	-0.078	-0.046	0.000
	12	0.000	-0.034	-0.062	-0.072	-0.062	-0.034	0.000
	11	0.000	-0.022	-0.042	-0.049	-0.042	-0.022	0.000
	10	0.000	-0.012	-0.025	-0.031	-0.026	-0.013	0.000
	9	0.000	-0.007	-0.016	-0.019	-0.016	-0.007	0.000
	8	0.000	-0.005	-0.012	-0.016	-0.012	-0.005	0.000
	7	0.000	-0.007	-0.016	-0.019	-0.016	-0.007	0.000
	6	0.000	-0.012	-0.025	-0.031	-0.025	-0.012	0.000
	5	0.000	-0.022	-0.042	-0.049	-0.042	-0.022	0.000
	4	0.000	-0.034	-0.062	-0.072	-0.062	-0.034	0.000
	3	0.000	-0.046	-0.078	-0.088	-0.078	-0.046	0.000
	2	0.000	-0.046	-0.070	-0.077	-0.070	-0.046	0.000
	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabel 4. Hasil perhitungan vortisitas bentuk persegi panjang I

		I						
		1	2	3	4	5	6	7
j	15	-2.912	-4.771	-4.413	-4.274	-4.413	-4.771	-2.912
	14	-1.053	-2.413	-2.836	-2.926	-2.836	-2.413	-1.053
	13	0.299	-0.994	-1.590	-1.759	-1.590	-0.994	0.299
	12	0.637	-0.271	-0.772	-0.929	-0.772	-0.271	0.637
	11	0.592	0.045	-0.298	-0.413	-0.298	0.045	0.592
	10	0.452	0.157	-0.053	-0.127	-0.053	0.157	0.452
	9	0.338	0.186	0.058	0.009	0.057	0.185	0.338
	8	0.296	0.189	0.088	0.049	0.088	0.189	0.296
	7	0.338	0.185	0.058	0.009	0.057	0.185	0.338
	6	0.452	0.157	-0.053	-0.127	-0.053	0.157	0.452
	5	0.592	0.045	-0.298	-0.413	-0.298	0.045	0.592
	4	0.637	-0.271	-0.772	-0.929	-0.772	-0.271	0.636
	3	0.299	-0.994	-1.590	-1.759	-1.590	-0.994	0.299
	2	-1.053	-2.413	-2.836	-2.926	-2.836	-2.413	-1.053
	1	-2.912	-4.771	-4.413	-4.274	-4.413	-4.771	-2.912

KESIMPULAN

Dari hasil perhitungan *stream function* ketiga bentuk ruangan (Tabel 1, 3 dan 5) dapat dilihat bahwa untuk bentuk ruangan bujursangkar hanya mempunyai sebuah harga ekstrim yang letaknya tepat di bagian tengah ($i = 6$; $j = 6$). Bentuk ruangan persegi panjang I mempunyai dua buah harga *stream function* yang ekstrim, yang terletak di bagian atas ($i = 4$; $j = 13$) dan di bagian bawah ($i = 4$; $j = 3$). Bentuk ruangan persegi panjang II mempunyai sebuah harga *stream function* yang ekstrim, seperti halnya pada bentuk ruangan bujur sangkar yang letaknya juga tepat di bagian tengah ($i = 8$; $j = 4$).

Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa jika jarak kedua dinding penggerak semakin dekat maka harga ekstrim untuk *stream function* hanya ada sebuah. Sebaliknya jika semakin jauh, maka harga ekstrim *stream function* menjadi dua yang besarnya sama dan simetris terhadap ruang.

Dari hasil perhitungan vortisitasnya (Tabel 2, 4 dan 6) dapat disimpulkan bahwa distribusi harganya mempunyai kecenderungan yang sama yaitu harga vortisitas yang kecil terletak pada dinding yang bergerak sedangkan harga vortisitas yang kecil terletak pada dinding yang diam.

Selain itu dapat diperkirakan bahwa untuk bentuk aliran fluida dalam ruangan bujur sangkar dan persegi panjang II kemungkinan mempunyai sebuah belokan tajam berupa pusaran yaitu pada harga *stream function* ekstrimnya. Sedangkan pada fluida dalam persegi panjang I mempunyai dua buah harga ekstrim sehingga tidak akan mempunyai pusat pusaran.

Tabel 5. Hasil perhitungan *stream function* bentuk persegi panjang II

	i														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	-0,023	-0,039	-0,049	-0,055	-0,058	-0,060	-0,060	-0,060	-0,058	-0,055	-0,049	-0,039	-0,023	0,000
5	0,000	-0,029	-0,055	-0,074	-0,085	-0,092	-0,095	-0,096	-0,095	-0,092	-0,085	-0,074	-0,055	-0,029	0,000
4	0,000	-0,031	-0,060	-0,081	-0,095	-0,103	-0,106	-0,108	-0,107	-0,103	-0,095	-0,081	-0,060	-0,031	0,000
3	0,000	-0,029	-0,055	-0,074	-0,085	-0,092	-0,095	-0,096	-0,095	-0,092	-0,085	-0,074	-0,055	-0,029	0,000
2	0,000	-0,023	-0,039	-0,049	-0,055	-0,058	-0,060	-0,060	-0,060	-0,058	-0,055	-0,049	-0,039	-0,023	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabel 6. Hasil perhitungan vortisitas bentuk persegi panjang II

	i														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	-5,471	-9,824	-8,349	-6,967	-5,947	-5,297	-4,950	-4,842	-4,949	-5,296	-5,945	-6,965	-8,347	-9,823	-5,470
6	-1,119	-4,567	-5,609	-5,700	-5,483	-5,234	-5,062	-5,003	-5,062	-5,233	-5,482	-5,699	-5,608	-4,566	-1,118
5	2,367	-1,715	-3,821	-4,742	-5,050	-5,094	-5,063	-5,044	-5,062	-5,094	-5,049	-4,741	-3,820	-1,714	2,368
4	3,293	-0,839	-3,219	-4,396	-4,882	-5,030	-5,051	-5,047	-5,050	-5,029	-4,881	-4,395	-3,219	-0,838	3,294
3	2,368	-1,714	-3,821	-4,742	-5,050	-5,094	-5,062	-5,043	-5,062	-5,093	-5,049	-4,741	-3,820	-1,714	2,368
2	-1,117	-4,566	-5,609	-5,700	-5,482	-5,234	-5,062	-5,002	-5,061	-5,233	-5,481	-5,699	-5,608	-4,566	-1,117
1	-5,470	-9,823	-8,348	-6,966	-5,946	-5,296	-4,949	-4,842	-4,949	-5,295	-5,945	-6,965	-8,347	-9,823	-5,470

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, D.A., et.al, 1984, *Computational Fluid Mechanic and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- Gerhard, P.M. and Richard J.G, 1985, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- Hoffmann, K.A, 1989, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, A Publication of Engineering Education System, Austin Texas.
- Lam, C.Y., 1994, *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Somo & Schuster (Asia) Pte Ltd, Singapore.
- Lukiyanto, Y.B., 2001, *Distribusi Stream Function Pada Ruangan Bujur Sangkar Yang Salah Satu Dindingnya Bergerak*, Media Teknika, 1 (1), USD, Yogyakarta, halaman 17-27.

Lampiran Program

```
PARAMETER (M=11,N=11)
DIMENSION P(M,N), P1(M,N), Z(M,N), Z1(M,N), R(M,N), SY(7), GR(70)
COMMON H, M1, N1
M1 = M-1
N1 = N-1
H = 1.0 / M1
HSQ = H*H
OPEN(7, FILE='SG4I.HAS')
ITER = 0
DO 1 I = 1, M
  DO 1 J = 1, N
    P(I,J) = 0.0
1    Z(I,J) = 0.0
2    ITER = ITER + 1
  DO 3 J = 2, N1
    Z(1,J) = (-P(2,J+1)+8./3.*P(2,J)-P(2,J-1)-2./3.*P(3,J))/HSQ
3    Z(M,J) = (-P(M1,J+1)+8./3.*P(M1,J)-P(M1,J-1)-2./3.*P(M-2,J))/HSQ
    DO 4 I = 2, M1
      Z(I,1) = (-P(I+1,2)+8./3.*P(I,2)-P(I-1,2)-2./3.*P(I,3))/HSQ-2./(3.*H)
4    Z(I,N) = (-P(I+1,N1)+8./3.*P(I,N1)-P(I-1,N1)-2./3.*P(I,N-2))/HSQ-
2./3.*H)
    DO 5 I = 1, M
      DO 5 J = 1, N
        R(I,J) = 0.0
5    Z1(I,J) = Z(I,J)
    CALL LIEBMN(Z,R,M,N,0.001)
    ERZ = 0.
    DO 6 I = 1, M
      DO 6 J = 2, N1
6    ERZ = ERZ + ABS(Z(I,J) - Z1(I,J))
    DO 7 I = 2, M1
      DO 7 J = 2, N1
        R(I,J) = -Z(I,J)
7    P1(I,J) = P(I,J)
```

```

CALL LIEBMN(P,R,M,N,0.001)
ERP = 0.0
DO 8 I = 2,M1
DO 8 J = 2,N1
8  ERP = ERP + ABS(P(I,J) - P1(I,J))
  EPSLON = 0.001
  IF(ERZ.GT.EPSLON.OR.ERP.GT.EPSLON) GOTO 2
  Z(1,1) = (Z(1,2) + Z(2,1)) / 2.
  Z(M,1) = (Z(M,2) + Z(M1,1)) / 2.
  Z(1,N) = (Z(2,N) + Z(1,N1)) / 2.
  Z(M,N) = (Z(M,N1) + Z(M1,N)) / 2.
  WRITE(7,9) ITER,ERP
9  FORMAT(T15,'STREAM FUNCTION',/,T15,'JUMLAH ITERASI =',T30,I3,
$    /,T15,'      ERP = ',T30,F7.5)
  DO 10 K = 1,N
    J = N-K+1
10  WRITE(7,11) (P(I,J), I = 1,M)
11  FORMAT(1X,11F7.3)
  WRITE(7,12) ERZ
12  FORMAT(T15,'ERZ =',T25,F7.5)
  DO 13 K = 1,N
    J = N-K+1
13  WRITE(7,11) (Z(I,J), I = 1,M)
  STOP
  END

SUBROUTINE LIEBMN(F,Q,M,N,ERMAX)
DIMENSION F(M,N), Q(M,N)
COMMON H,M1,N1
DO 1 I = 2,M1
DO 1 J = 2,N1
1  F(I,J) = 0.0
2  ERROR = 0.0
DO 3 I = 2,M1
DO 3 J = 2,N1
  FOLD = F(I,J)
  F(I,J) = 0.25*(F(I-1,J)+F(I+1,J)+F(I,J-1)+F(I,J+1)-H*H*Q(I,J))
3  ERROR = ERROR + ABS(F(I,J) - FOLD)
  IF(ERROR.GT.ERMAX) GOTO 2
  RETURN
END

```